



# Contrôle longitudinal et caractérisation optique du détecteur Virgo

Stephane Kreckelbergh

## ► To cite this version:

Stephane Kreckelbergh. Contrôle longitudinal et caractérisation optique du détecteur Virgo. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris Sud - Paris XI, 2005. Français. NNT : . tel-00012159

**HAL Id: tel-00012159**

**<https://theses.hal.science/tel-00012159>**

Submitted on 18 Apr 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY  
n° d'ordre :

**LAL 05-102**  
Octobre 2005

UNIVERSITÉ DE PARIS SUD  
CENTRE D'ORSAY

THÈSE *présentée*

*pour obtenir*

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

Spécialité : Physique des Grands Instruments

*par*

**Stephane KRECKELBERGH**

*Contrôle longitudinal et caractérisation optique du  
détecteur VIRGO*

Soutenue le 10 Octobre 2005 devant la Commission d'examen

MM.	François	AMIRANOFF	Examineur
	Stefano	BRACCINI	Rapporteur
	Fabien	CAVALIER	Directeur de thèse
	Gérard	FONTAINE	Rapporteur
	Benoît	MOURS	Examineur
	Guy	WORMSER	Président du jury

---

---

# Remerciements

Bonjour (à tous et à toutes),

je tiens tout d'abord à remercier Mr Bernard D'Almagne de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire lors de mon arrivée ainsi que le nouveau directeur Mr Guy Wormser, d'être membre de mon jury.

Après ces quelques phrases protocolaires, je voudrais remercier tous ceux qui m'ont aidé durant ces trois années.

Le choix de Virgo c'est aussi le choix d'un pays, l'Italie, et surtout d'une région, la Toscane, riche d'un grand passé. Je remercie le groupe Virgo de m'avoir accueilli et aidé tout au long de la thèse.

Je remercie mon directeur de thèse, Monsieur Fabien Cavalier. Mon activité m'a obligé de m'absenter et m'a privé de ses précieux commentaires et conseils. Pour ce qu'il a fait et pour ce qu'il va faire (?!) je lui souhaite plein de réussite. Nous avons souvent parlé de sport, un peu de rugby avec le BO (club de ma région), de vélos, et surtout de football donc "Allez l'OM " !

Passons à Patrice Hello, Monsieur optique du groupe qui dernièrement s'est mis à la pelote. Au bilan de cette nouvelle passion, un seul succès du lancer de balle dans la tasse de thé posé sur le bureau de Fabien. En mon absence, il aura un nouvel angle de tir et il aura certainement un plus grand taux de réussite. Toujours de bonne humeur, bon compagnon, on s'est vraiment bien régalez...

Marie Anne Bizouard, un peu bizou hard des fois. La saltimbanque du groupe, toujours prête pour une bière et toujours la dernière à les finir. C'est aussi mademoiselle SVC pour Sujet Verbe Complément. Elle m'a fait la remarque durant ma rédaction que mes phrases étaient incomplètes. Ce qui est remarquable c'est qu'elle ne les comprend pas dès lors que tous les éléments sont là, bizarre...

Il y aussi mon compère André Claude Clapson, un peu english sur les cotés qui termine sa thèse. Ca a été un plaisir de le côtoyer professionnellement et personnellement. Je lui souhaite bon courage pour la suite.

Je salue également Monica Varvella, que j'ai très peu vu et qui travaille sur le futur de Virgo.

Le dernier arrivé Nicolas Leroy dépasse parfois son quota de blagues mais il est tellement serviable. Si vous avez une question sur la composition de tel ou tel jury du CNRS, il vous renseignera. Bon courage dans Virgo.

Venons en aux personnes que j'ai croisé sur le site.

Je commencerai d'abord avec celle avec qui j'ai d'abord partagé puis collaboré sur l'activité du Locking, Lisa Barsotti. Beaucoup plus présente que moi sur l'instrument, elle



---

en est devenue presque un élément.

Puis, il y a Stefano Braccini dernièrement arrivé dans le groupe Locking. J'ai grâce à lui et à Lisa fait d'énormes progrès en italien ; " Posso parlare italiano ". Eh oui... encore une langue dans ma besace.

Il y a aussi Edwige Tournefier, que j'ai apparemment inondé de mes calculs. Très présente sur le site. Je lui souhaite plein de plaisir pour la suite.

Enfin viennent les personnes qui ont partagé les jours et les nuits du groupe Locking, Rafaele Flaminio, Paolo Ruggi (l'indispensable) et Federico Nenci.

Viennent aussi les autres thésards ou post doc que j'ai côtoyés : Romain Gouaty, Sonia Karkar (la grenouille), Salem et les étudiants de Naples ô combien sympathiques.

Je saluerai également les joueurs de squash Christophe et Simon qui ont encore beaucoup de progrès à faire pour arriver ne serait ce qu'à me prendre une manche qui fait tout de même 11 points. Bon entraînement les gars. Je remercie aussi la grande Sophie qui ira chanter ailleurs que dans Virgo.

Je remercie mes parents Jane (" xane ") et Christian pour simplement être ce qu'ils sont : "Milesker aita eta ama hor izaiteagatik eta zuen amodioarentzat ". Je les trouve épatants.

Un grand merci à mon frère jumeau Xilban qui aurait pu me remplacer à la soutenance, pour son aide et tout le reste "milesker gizon, heldu naiz".

Je salue toute ma famille et entre autres mes cousins et cousines qui sont tellement " marrantes " : Xibi, Lydia, Eloisa, Evelyne, Teresa et Dominique.

Je vais également saluer celle qui a partagé une partie de ma vie à savoir Solenn. Je lui souhaite une bonne soutenance et bon courage pour la suite.

Je rends ici un hommage vibrant à nos amis (ou adversaires) de Microsoft et autres membres des communautés libres pour les outils de plus en plus performants et encombrant qu'ils nous offrent.

Enfin, je conclurai cette page de remerciement sur une phrase de Leonard De Vinci : " Va prendre tes leçons dans la nature ". Et puis comme le disait Prévert : "Mangeons sur l'herbe avant que l'herbe ne mange sur nous ".

Voilà, la page de remerciement est terminée, vous pouvez tourner la page et vous aventurer dans le monde si palpitant des ondes gravitationnelles.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Relativité Générale et ondes gravitationnelles</b>	<b>5</b>
1.1	Vers la Relativité Générale . . . . .	5
1.2	Généralités sur la théorie . . . . .	9
1.2.1	Caractéristiques des équations d'Einstein . . . . .	9
1.2.2	La loi de la gravitation universelle de Newton . . . . .	10
1.2.3	Le moment dipolaire . . . . .	11
1.3	Les ondes gravitationnelles . . . . .	12
1.3.1	La Relativité Générale en champ faible . . . . .	15
1.3.2	Rayonnement d'onde gravitationnelle . . . . .	18
1.3.3	Réalité des ondes gravitationnelles . . . . .	20
1.4	L'astronomie gravitationnelle . . . . .	22
1.4.1	Une nouvelle fenêtre sur l'univers . . . . .	22
1.4.2	Les sources d'ondes gravitationnelles . . . . .	22
<b>2</b>	<b>L'interférométrie et Virgo</b>	<b>29</b>
2.1	Principes de détection des ondes gravitationnelles . . . . .	29
2.1.1	L'interféromètre de Michelson . . . . .	29
2.1.2	Définir la sensibilité du détecteur . . . . .	31
2.1.3	Bruit fondamentaux dans un interféromètre . . . . .	33
2.1.4	La technique de modulation synchrone . . . . .	36
2.1.5	Améliorations du principe initial . . . . .	38
2.2	Le détecteur Virgo et ses caractéristiques . . . . .	39
2.2.1	Le module laser . . . . .	39
2.2.2	Le banc de détection . . . . .	43
2.2.3	Le système du vide . . . . .	44
2.2.4	Les suspensions . . . . .	45
2.3	Les miroirs . . . . .	49
2.4	Bruits limitants de VIRGO . . . . .	55
2.5	Autres interféromètre dans le monde . . . . .	59
2.5.1	Architecture VIRGO . . . . .	59
2.5.2	Lignes à retard : GEO . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Locking : théorie et expérience</b>	<b>65</b>
3.1	Définition du point de fonctionnement de Virgo . . . . .	65
3.1.1	Spécifications sur les longueurs des cavités optiques . . . . .	65
3.1.2	Spécifications angulaires . . . . .	67
3.1.3	Le "Commissioning" de Virgo . . . . .	67
3.1.4	Les contrôles locaux . . . . .	68

---

3.1.5	La disposition des photodiodes . . . . .	70
3.2	Principes généraux du Locking . . . . .	74
3.2.1	La technique Pound Drever . . . . .	74
3.2.2	Technique de la linéarisation des signaux d'erreurs . . . . .	78
3.2.3	Les asservissements . . . . .	79
3.2.4	Contrainte sur la vitesse du miroir pour acquérir le lock . . . . .	82
3.3	L'outil de simulation SIESTA . . . . .	83
3.3.1	La structure générale . . . . .	83
3.3.2	Module de simulation Mécanique . . . . .	84
3.3.3	Module de simulation Optique . . . . .	85
3.4	Aspect technique du Locking . . . . .	85
3.4.1	La boucle de contrôle et ses acteurs . . . . .	85
3.4.2	Agir sur les miroirs . . . . .	85
3.4.3	Le Contrôle Global . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Lock des cavités Fabry-Perot et de l'interféromètre recombéné</b>	<b>101</b>
4.1	Lock des cavités Fabry-Perot Nord et Ouest . . . . .	101
4.1.1	Lock de la cavité Fabry-Perot Nord . . . . .	101
4.1.2	Lock de la cavité Fabry-Perot Ouest . . . . .	113
4.1.3	Les runs C2 et C3 . . . . .	113
4.2	L'interféromètre recombéné . . . . .	118
4.2.1	Vers l'interféromètre recombéné ? . . . . .	118
4.2.2	Le locking . . . . .	119
4.2.3	Le run C4 . . . . .	124
<b>5</b>	<b>L'acquisition du lock de VIRGO</b>	<b>127</b>
5.1	Un système plus complexe : VIRGO . . . . .	127
5.2	Acquisition du lock multi-étape . . . . .	132
5.2.1	Estimation des paramètres pour la linéarisation . . . . .	133
5.2.2	La cavité PR-NI . . . . .	137
5.2.3	Etape2 . . . . .	140
5.2.4	Etape3 . . . . .	148
5.2.5	Etape4 . . . . .	154
5.3	Algorithme de Lock à Finesse Variable . . . . .	162
5.3.1	Réduire temporairement le gain de recyclage . . . . .	162
5.3.2	Réduire la composante CARM dans les signaux d'erreurs . . . . .	163
5.3.3	Algorithme de lock . . . . .	163
5.3.4	Le Run C5 . . . . .	168
5.3.5	Les "jumps" . . . . .	169
5.3.6	Le Run C6 . . . . .	173
<b>6</b>	<b>L'offset d'Anderson</b>	<b>175</b>
6.1	L'offset d'Anderson dans le mode recombéné de Virgo . . . . .	176
6.1.1	Expérience . . . . .	177
6.1.2	Explication théorique . . . . .	178
6.1.3	Simulation . . . . .	182
6.2	L'offset d'Anderson dans Virgo . . . . .	184
6.2.1	Simulation . . . . .	184

---

<b>A</b>	<b>Faisceau et cavité optique</b>	<b>191</b>
A.1	Equation générale d'une cavité Fabry-Perot . . . . .	191
A.1.1	Réponse dynamique d'une cavité Fabry-Perot . . . . .	196
A.2	Faisceau Gaussien . . . . .	199
A.2.1	Modes d'Hermitte-Gauss . . . . .	199
A.2.2	Modes de Laguerre-Gauss . . . . .	201
A.2.3	Propagation d'un faisceau gaussien dans une cavité Fabry-Perot . .	202
A.3	Réponse d'une cavité aux défauts statiques du faisceau . . . . .	205
A.3.1	Déplacement transverse et rotation . . . . .	205
A.3.2	Effet du mismatch . . . . .	207



# Listes des acronymes

Nous définissons dans cette annexe tous les acronymes utilisés dans le document :

- FP : cavité Fabry Perot.
- CITF : interféromètre central.
- NI : miroir d'entrée du bras Nord.
- WI : miroir d'entrée du bras Ouest.
- NE : miroir de fond du bras Nord.
- WE : miroir de fond du bras Ouest.
- PR : miroir de recyclage.
- BS : lame séparatrice ou “beam splitter”.
  
- PRCL ou  $l_r$  : longueur de la cavité de recyclage.
- MICH ou  $\Delta l$  : différence de longueur des bras du Michelson.
- DARM : mouvement en mode différentiel des bras.
- CARM : mouvement en mode commun des bras.
  
- SSFS : Deuxième étage de stabilisation de fréquence.
- FTBO : Fonction de transfert en boucle ouverte.
- RdC : Rayon de courbure d'un miroir.



# Introduction

Les ondes gravitationnelles sont décrites dans le cadre de la théorie de la Relativité Générale et leur existence a été prédite dès 1918. Une preuve indirecte de leur existence a été donnée en 1973 par l'étude de la variation de la période orbitale du pulsar binaire PSR B1913+16. Il reste à les mesurer directement.

L'onde gravitationnelle peut être considérée comme une perturbation de la métrique de l'espace-temps plat (Minkowski) se déplaçant à la vitesse de la lumière. Les événements cosmiques cataclysmiques (supernovæ, coalescences de systèmes binaires, trous noirs...) sont probablement les sources d'onde gravitationnelle les plus intenses et les plus facilement détectables. Toutefois, le signal physique attendu reste de très faible amplitude. Le premier chapitre est une introduction à la Relativité Générale ainsi qu'aux sources du rayonnement gravitationnel.

Les détecteurs d'onde gravitationnelle doivent avoir la capacité de réaliser des mesures de distance très précises tout en s'affranchissant de nombreux bruits expérimentaux. Les détecteurs les plus prometteurs sont basés sur la mesure de la variation relative de longueur provoquée par le passage d'une onde gravitationnelle. Seuls des interféromètres géants apparaissent aujourd'hui capables de détecter ce signal. Plusieurs instruments de ce type sont actuellement en fonctionnement ou en construction dans le monde ; parmi eux, Virgo situé près de Pise, fruit d'une collaboration franco-italienne au sein de laquelle j'ai effectué ma thèse.

Dans le chapitre 2, nous expliquons l'intérêt de l'interférométrie pour la mesure directe de l'onde gravitationnelle et les techniques mises en place pour y aboutir. Le passage d'une onde gravitationnelle engendre une variation relative de la distance entre deux masses libres distantes d'une longueur  $L$ , variation proportionnelle à l'amplitude de l'onde gravitationnelle. Une variation de longueur peut être assimilée à un déphasage introduit sur le parcours d'une onde électromagnétique. Elle peut être mise en évidence grâce à un interféromètre de type Michelson. La mesure de l'amplitude du signal de la frange d'interférence en sortie du Michelson détectée par une photodiode est convertie en amplitude gravitationnelle équivalente qui définit la sensibilité de l'instrument à l'onde gravitationnelle. Cette sensibilité est améliorée en maximisant la puissance du laser stockée à l'intérieur de l'instrument (recyclage de puissance) et par l'utilisation de bras formé de cavités Fabry-Perot (amplification du déphasage provoqué par le passage de l'onde gravitationnelle dans l'interféromètre). Nous décrirons également, les différents choix techniques adoptés par la collaboration pour réduire la contribution des bruits environnementaux à la sensibilité du détecteur dans la bande de fréquence de détection comprise entre quelques Hz et une dizaine de kHz.

J'aborderai par la suite la question du maintien du détecteur à son point de fonctionnement. Pour cela, il est nécessaire de mettre en place des contrôles actifs des longueurs



des cavités optiques et des degrés de liberté angulaires des miroirs.

Pour obtenir une sensibilité suffisante, il est nécessaire de contrôler à quelques nanomètres près les longueurs des différentes cavités optiques : cette activité porte le nom de “Locking” et est le sujet de cette thèse. Ainsi, dans le cas de Virgo nous avons quatre cavités optiques à contrôler. Pour préparer l’acquisition du “lock” de Virgo, nous avons travaillé dans des configurations optiques plus simple. Ceci a permis une intégration progressive des sous systèmes en vue du travail sur Virgo.

Le chapitre 3 a pour but de présenter la théorie du Locking et de décrire la chaîne de contrôle de manière générale. Nous y illustrerons les limites et les méthodes que nous avons employées en vue de préparer l’acquisition du lock de Virgo.

Ainsi, le chapitre 4 nous illustrera les résultats expérimentaux sur l’acquisition du lock des deux cavités Fabry-Perot des bras ainsi que du mode recombinaison de l’interféromètre qui consiste à contrôler de manière indépendante trois cavités optiques.

Dans le chapitre 5, nous présenterons le travail sur l’acquisition du lock de Virgo. Il s’agira d’étendre les principes du Locking présentés au Chapitre 3 à un instrument plus complexe ou nous avons quatre longueurs à contrôler. Les signaux d’erreurs employés pour le contrôle de ces longueurs sont couplés. Il s’agira de mettre en place une méthode qui permette de découpler au mieux le système.

Enfin, au chapitre 6, nous ferons l’étude d’un effet apparu durant le travail sur l’acquisition du lock du mode recombinaison de l’interféromètre. Nous avons observé que le signal d’erreur utilisé pour le contrôle longitudinale des cavités optiques était pollué par la technique employée pour le contrôle angulaire des miroirs. Nous expliquerons le mécanisme de cet effet et nous verrons qu’aujourd’hui cet effet est un des facteurs limitant de la stabilité du détecteur dans sa configuration complète.

# Chapitre 1

## Relativité Générale et ondes gravitationnelles

Dans ce chapitre, nous abordons rapidement les notions et les idées importantes qui ont conduit à l'édification de la théorie de la Relativité Générale [1]. A partir de là, nous déduisons l'existence des ondes gravitationnelles, solution d'une équation de champ similaire à celle obtenue dans le cadre de l'électromagnétisme. La dernière partie est consacrée à une présentation des différentes sources d'ondes gravitationnelles susceptibles d'être à l'origine de la première détection par un interféromètre tel que Virgo.

### 1.1 Vers la Relativité Générale

La description des processus se déroulant dans la nature exige un référentiel. Nous entendons par là un système de coordonnées pour repérer la position des objets dans l'espace et une horloge pour indiquer le temps. Un référentiel d'inertie ou galiléen est un référentiel dans lequel le mouvement d'un corps non soumis à l'action des forces extérieures s'effectue à vitesse constante. Le principe de relativité stipule que tous les systèmes d'inertie sont équivalents pour la description du mouvement.

La « mécanique classique » suppose l'instantanéité des interactions. En effet, l'interaction des corps est décrite au moyen de l'énergie potentielle qui ne dépend que de leurs positions. Le changement de position de l'un des corps en interaction se reflète au même instant sur les autres corps. En mécanique classique, l'espace est relatif. Les relations spatiales entre divers événements dépendent du référentiel dans lequel elles sont décrites. En revanche, le temps est absolu : les propriétés du temps sont considérées comme indépendantes du référentiel.

Le passage d'un référentiel d'inertie  $K$  à un référentiel d'inertie  $K'$  se déplaçant par rapport à  $K$  avec la vitesse constante  $V$  le long de l'axe  $x$  s'effectue par la transformation spéciale de Galilée :

$$x' = x + Vt, y' = y, z' = z, t' = t \quad (1.1)$$

Nous déduisons de ces relations, la loi d'additivité des vitesses :

$$\begin{aligned} x' &= x + Vt \\ \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} + V \frac{dt}{dt'} \\ \text{or } t' &= t \text{ donc :} \\ v' &= v + V \end{aligned}$$

Par conséquent, la vitesse d'un mouvement composé est égale à la somme (vectorielle) des vitesses composantes. D'après ce résultat, la vitesse de propagation de la lumière dans le sens de translation de la Terre devrait donc être différente de celle dans le sens opposé.

Cependant, l'expérience de Michelson et Morley [2] en 1881 a démontré l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à la direction de sa propagation.

L'interprétation d'Einstein de cette contradiction va conduire à la théorie de la Relativité Restreinte dont les deux postulats sont les suivants :

**1<sup>er</sup> postulat :** Tous les systèmes galiléens (systèmes d'inertie) sont équivalents pour la formulation des lois physiques.

**2<sup>ème</sup> postulat :** Dans le vide, la lumière se propage avec une vitesse constante  $c$  par rapport à n'importe quel système galiléen, indépendamment du mouvement de la source.

La mécanique fondée à partir de la Relativité Restreinte est dite relativiste. La mécanique classique est l'expression de la mécanique relativiste pour des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière.

Nous comprenons bien que le postulat de la constance de la lumière est fondamental dans cette nouvelle théorie. Pour la traduire en terme mathématique, nous devons introduire la notion d'intervalle d'espace-temps.

### L'intervalle d'espace-temps

Soit un premier événement consistant en l'émission d'un signal qui se propage à la vitesse de la lumière à partir d'un point de coordonnées  $x_1$ ,  $y_1$  et  $z_1$  à l'instant  $t_1$  dans le référentiel K. Un second événement consistera en l'arrivée du signal au point  $x_2$ ,  $y_2$  et  $z_2$  à l'instant  $t_2$  dans le même référentiel.

Le chemin parcouru est :  $L = c (t_2 - t_1)$  ; une écriture équivalente est :

$$L = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$$

Nous pouvons écrire la relation suivante entre les coordonnées des deux événements dans le référentiel K :

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0$$

De manière plus générale, si  $x_1, y_1, z_1, t_1$  et  $x_2, y_2, z_2, t_2$  sont les coordonnées de deux événements quelconques, la quantité  $s^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$  est appelée intervalle d'espace-temps entre ces deux événements.

Pour deux événements infiniment voisins, l'intervalle d'espace-temps  $ds$  s'écrit :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.2)$$

et pour la lumière  $ds^2 = 0$ . La traduction mathématique de la constance de la vitesse de la lumière est l'invariance par changement de référentiel Galiléen de l'intervalle d'espace-temps.

Montrons maintenant que la transformation de Galilée ne respecte pas l'invariance de l'intervalle d'espace-temps. Pour cela, considérons deux référentiels K et K' se déplaçant l'un par rapport à l'autre avec une vitesse constante V. Nous choisissons les axes des coordonnées de sorte que les axes x et x' coïncident et que les axes y et z soient parallèles à y' et z' avec  $\vec{V} = V \vec{x}$  ; désignons par t et t' le temps dans les référentiels K et K'.

Calculons l'intervalle d'espace-temps entre deux événements dans les référentiels K et K' en utilisant la transformation de Galilée (1.1) :

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ ds^2 &= c^2 dt'^2 - (dx' - V dt')^2 - dy'^2 - dz'^2 \\ ds^2 &= ds'^2 - V dt' (-2 dx' + V dt') \\ \text{soit :} \\ ds^2 &\neq ds'^2 \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation de Galilée ne respecte pas les postulats de la Relativité Restreinte : elle ne laisse pas invariant l'intervalle d'espace-temps entre deux événements.

La transformation respectant les postulats de la Relativité Restreinte est une rotation de l'espace quadridimensionnel x, y, z et ct et appelée transformation de Lorentz.

Elle s'écrit couramment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x &= \gamma (x' + \beta ct'), y = y', z = z', t = \gamma \left( ct' + \frac{\beta}{c} x' \right) \\ \text{avec : } \beta &= \frac{V}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

La transformation de Lorentz permet de conserver l'intervalle d'espace-temps pour le passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Cette transformation est à la base de la théorie de la Relativité Restreinte pour laquelle l'espace et le temps sont maintenant couplés.

Pourtant, des expériences (pendule de Foucault, expérience de Sagnac [3] [4] ...) mettant en jeu des mouvements accélérés permettent de mettre en évidence ce même mouvement, assimilable donc à un mouvement absolu, vision que la Relativité Restreinte a rendu caduque. C'est à cette apparente contradiction auquel la Relativité Générale répond [5]. Le fondement de cet édifice théorique est le principe d'équivalence.

### Le principe d'équivalence et sa conséquence

Le principe d'équivalence postule l'égalité entre la masse inerte qui intervient dans le principe fondamental de la dynamique et la masse gravitationnelle que nous retrouvons dans la loi de la gravitation universelle de Newton. Cette égalité a été vérifiée expérimentalement à  $2 \times 10^{-13}$  près [6, 7, 8].

Il s'ensuit que les propriétés du mouvement dans un référentiel non inertiel sont les mêmes que dans un système inertiel en présence d'un champ gravitationnel car dans un champ gravitationnel, tous les corps se meuvent de la même manière.

Reprenons la définition de l'intervalle d'espace-temps. Nous allons grâce à une nouvelle interprétation de cette notion généraliser les concepts d'espace et de temps. Dans un référentiel inertiel en coordonnées cartésiennes, l'intervalle d'espace-temps  $ds$  est donné par la relation :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (1.4)$$

Considérons par exemple, un système de coordonnées en rotation uniforme de vitesse angulaire  $\Omega$  selon l'axe des  $z$ , alors :

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t) \\ y &= x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t) \\ z &= z' \end{aligned}$$

L'intervalle d'espace-temps prend la forme :

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt$$

Quelle que soit la loi de transformation choisie, dans un référentiel non inertiel, l'intervalle d'espace-temps ( $ds^2$ ) n'est plus la somme des carrés des différentielles des quatres coordonnées mais le carré de l'intervalle d'espace-temps est une forme quadratique des différentielles des quatres coordonnées, c'est-à-dire :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.5)$$

où les  $g_{\mu\nu}$  sont des fonctions de la coordonnée temporelle ( $x_0 = ct$ ) et des coordonnées spatiales ( $x_1 = x, x_2 = y$  et  $x_3 = z$ ). Les quantités  $g_{\mu\nu}$  qui déterminent toutes les propriétés de la géométrie dans chaque système de coordonnées définissent la métrique de l'espace-temps. Le tenseur<sup>1</sup>  $g_{\mu\nu}$  est symétrique ( $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ). Nous devons donc déterminer au total 10 quantités distinctes.

Par exemple, l'expression des  $g_{\mu\nu}$  dans un référentiel d'inertie, en coordonnées cartésiennes est égale à :

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \text{ et } g_{\mu\nu} = 0 \text{ pour } \mu \neq \nu \quad (1.6)$$

Le système de coordonnées quadridimensionnel avec de telles valeurs de  $g_{\mu\nu}$  est communément dénommé métrique de Minkowski ( $\eta_{\mu\nu}$ ). Cette métrique est associée à la théorie de la Relativité Restreinte et permet de décrire un espace-temps plat.

En général, en présence d'un champ gravitationnel, l'espace temps est tel que les  $g_{\mu\nu}$  déterminant sa métrique ne peuvent être ramenées par aucune transformation de coordonnées à la métrique de Minkowski dans tout l'espace. Un tel espace temps est dit courbe, contrairement à l'espace-temps plat où cette réduction est possible.

La théorie des champs de gravitation édifée sur la base du principe d'équivalence et des postulats de la Relativité Restreinte est appelée Relativité Générale. Elle a été établie par Einstein qui l'a définitivement formulée en 1916 [9] [10].

---

<sup>1</sup>Matrice invariante par transformation de Lorentz.

## 1.2 Généralités sur la théorie

Les équations d'Einstein sont la traduction mathématique de l'égalité COURBURE = ENERGIE, et s'écrivent :

$$\mathbf{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T} \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{G}$  le tenseur d'Einstein,  $\mathbf{T}$  le tenseur Energie-Impulsion qui décrit les densités et les flux d'énergie et d'impulsion d'un système et enfin  $G$  la constante de la gravitation universelle de Newton.

Plusieurs expressions des équations d'Einstein sont possibles dû à la maniabilité induite par l'utilisation des tenseurs. Une autre réécriture qui nous sera utile un peu plus tard est la suivante :

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} T \right) \quad (1.8)$$

où  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur Energie-Impulsion avec  $T$  le scalaire correspondant,  $\delta_{\nu}^{\mu}$  le symbole de Kronecker<sup>2</sup> et  $R_{\mu\nu}$  le tenseur de Riemann<sup>3</sup>.

### 1.2.1 Caractéristiques des équations d'Einstein

Les équations d'Einstein (1.7) constituent un système de huit équations aux dérivées partielles du second ordre. Il est nécessaire de définir 10 conditions initiales : la distribution de la densité de matière et ses trois composantes de vitesses ; les six quantités définissant le champ gravitationnel libre (non lié à la matière).

La géométrie (membre de gauche de l'équation 1.7) est directement connectée à l'énergie-impulsion totale (membre de droite de l'équation 1.7). Le contenu en énergie-impulsion courbe l'espace-temps. C'est une théorie non-linéaire car le membre de droite de l'équation 1.7 contient lui-même une contribution provenant de la courbure de l'espace-temps.

Il en résulte que le principe de superposition n'est pas utilisable pour les champs gravitationnels, contrairement à ce que nous avons pour le champ électromagnétique en Relativité Restreinte. Cependant, pour un champ gravitationnel faible, loin de la source, les équations d'Einstein sont linéaires en première approximation et le principe de superposition est alors valable.

La théorie de la Relativité Restreinte est l'approximation de la théorie de la Relativité Générale pour des champs gravitationnels nuls et des vitesses quelconques. Pour les champs gravitationnels faibles et des vitesses petites devant  $c$ , nous obtenons la loi de la gravitation universelle de Newton comme nous allons le voir dans ce qui suit.

---

<sup>2</sup> $\delta_{\nu}^{\mu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$  ;  $\delta_{\nu}^{\mu} = 1$  si  $\mu = \nu$ .

<sup>3</sup>Tenseur qui caractérise la courbure de l'espace.

---

### 1.2.2 La loi de la gravitation universelle de Newton

En mécanique non relativiste (champ gravitationnel faible), le mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel est déterminé par la fonction de Lagrange :

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\phi$$

où  $\phi$  est le potentiel du champ gravitationnel newtonien<sup>4</sup>.

L'action non relativiste  $S$  pour une particule dans un champ gravitationnel prend donc la forme :

$$S = \int L dt = -mc \int \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt$$

De plus,  $S = -mc \int ds$ , soit :

$$ds = \left( c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) dt$$

En élevant au carré et en supposant  $v \ll c$  et  $\phi \ll c$  nous trouvons :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (c^2 + 2\phi) dt^2 - dr^2 \text{ avec } \vec{v} dt = d\vec{r} \\ ds^2 &= c^2 \left( 1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) dt^2 - dr^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Par conséquent, la composante  $g_{00}$  du tenseur métrique dans le cas d'un champ gravitationnel faible est :

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \quad (1.10)$$

Pour un mouvement macroscopique lent, toutes les composantes spatiales du tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$  sont nulles, seule subsiste la composante temporelle, alors :

$$T_{00} = T = \mu c^2 \quad (1.11)$$

avec  $\mu$  la somme des masses au repos des particules dans l'unité de volume considérée.

L'équation 1.8 se réduit à :

$$R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \mu \quad (1.12)$$

Le tenseur de Riemann s'écrit à partir des simplifications de départ et de  $g_{00}$  (1.10) :

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2} \Delta \phi \quad (1.13)$$

En combinant 1.12 et 1.13, nous obtenons :

$$\Delta \phi = 4\pi G \mu \quad (1.14)$$

---

<sup>4</sup>Le choix de  $-mc^2$  comme constante additive arbitraire est fait pour que le potentiel s'annule loin des sources du champ.

Cette expression est analogue à l'équation de Poisson obtenue dans le cas de l'électromagnétisme, avec cette différence que nous avons, au lieu d'une densité de charge le produit par  $-\pi G$  de la densité de masse.

La solution générale de cette expression est :

$$\phi = -G \int \frac{\mu dV}{R}$$

Cette formule donne, dans l'approximation non relativiste, le potentiel du champ de gravitation de toute distribution de masse. En particulier, le potentiel d'une seule particule de masse  $m$  est :

$$\phi = -G \frac{m}{R}$$

et donc la force  $F = -m' \frac{\delta \phi}{\delta R}$  agissant dans ce champ sur une particule de masse  $m'$  est la loi d'attraction universelle de Newton :

$$F = -G \frac{m m'}{R^2} \quad (1.15)$$

Nous venons de voir que nous retrouvons, à partir des équation d'Einstein, la loi de la gravitation universelle de Newton. Pour cela, nous avons obtenu une relation équivalente à l'équation de Poisson dans le cadre du champ gravitationnel. L'analogie entre le champ gravitationnel et le champ électromagnétique va nous permettre de cerner une des caractéristiques essentielles de l'onde gravitationnelle. Pour cela, reprenons la définition du moment dipolaire.

### 1.2.3 Le moment dipolaire électrique

Considérons un ensemble de charges électriques  $q_i$ , disposées en des points  $A_i$  au voisinage d'un point O, dans un volume fini de l'espace. Nous posons  $\vec{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$ . Le potentiel V en un point M de l'espace tel que  $r = |\overrightarrow{OM}| \gg |\vec{a}_i|$  est :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \text{ avec } \vec{r}_i = \overrightarrow{A_iM}$$

En se limitant à un développement au premier ordre de cette expression en  $\frac{\vec{a}_i}{r}$  avec  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||}$ , nous avons :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \sum_i q_i \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{u} \cdot \left( \sum_i q_i \vec{a}_i \right) \frac{1}{r^2}$$

Or le moment dipolaire électrique s'écrit :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i$$



Deux cas sont alors à distinguer :

a) Si,

$$\sum_i q_i = Q \neq 0$$

nous pouvons alors choisir le référentiel de façon que (théorème du barycentre) :

$$\sum_i q_i \vec{a}_i = \sum_i q_i \vec{OA_i} = \vec{0}$$

Le moment dipolaire est donc nul dans ce référentiel.

b) Si,

$$\sum_i q_i = 0$$

c'est-à-dire si la charge totale du système est nulle le moment dipolaire est indépendant du référentiel choisi.

Remplaçons la distribution de charge par une distribution de masse dans le cas a). Par un changement de référentiel approprié, nous pouvons donc annuler le moment dipolaire pour le champ gravitationnel dans une approximation en champ faible des équations d'Einstein. Ainsi, le rayonnement gravitationnel ne possède pas de composante dipolaire mais seulement un moment quadrupolaire à l'ordre le plus bas.

### 1.3 Les ondes gravitationnelles

Les concepts de force, d'impulsion, d'énergie... doivent être repensés dans le nouvel édifice théorique de la Relativité Générale. Les outils nécessaires à cette réécriture sont issus de la géométrie différentielle et permettent une généralisation des concepts énoncés précédemment. Il est toujours indispensable de repérer la position des objets dans l'espace et d'indiquer le temps, cependant ces deux notions sont maintenant intimement liées. Nous parlons d'espace-temps.

L'espace-temps peut être "maillé" par différents systèmes de coordonnées tous équivalents. Un scalaire ne dépend pas du système de coordonnées (par exemple  $ds^2$ ).

Nous avons vu que les équations d'Einstein implique la manipulation des tenseurs. Deux formes d'un même tenseur existent : covariante (indice en bas) et contravariante (indice en haut). Nous passons de l'une à l'autre par l'utilisation du tenseur  $g^{\mu\nu}$  sachant que<sup>5</sup> :

$$g^{\mu\sigma} g_{\nu\sigma} = \delta_{\nu}^{\mu}$$

où  $\delta_{\nu}^{\mu}$  est le symbole de Kronecker. Ainsi  $g^{\mu\nu}$  et  $g_{\nu\mu}$  sont représentés par des matrices inverses l'une de l'autre.

---

<sup>5</sup>Nous adoptons la convention d'Einstein : un indice répété (ici  $\sigma$ ) est sommé sur ses quatre composantes.

Un quadrivecteur contravariant (par exemple le quadrivecteur vitesse qui est le résultat d'un déplacement d'un vecteur le long d'un chemin) de composantes  $V^\nu$  dans un système de coordonnée  $(A)$  se retrouvent avec les composantes  $V'^\mu$  dans un système de coordonnées  $(A')$  telles que :

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (1.16)$$

D'un autre côté, un quadrivecteur covariant  $U_\nu$  obéit à une loi de transformation inverse à 1.16 :

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \quad (1.17)$$

Pour obtenir l'expression d'une dérivée covariante<sup>6</sup> (et contravariante) d'un vecteur  $V$ , nous devons introduire la connection affine  $\Gamma_{\lambda\nu}^\mu$  (qui n'est pas tensorielle) telle que la quantité :

$$\frac{dV^\lambda}{dx^\mu} = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^\nu \quad (1.18)$$

soit bien un tenseur.

La connection affine (symboles de Christoffel) qui n'est pas un tenseur permet de transporter des vecteurs d'un espace tangent à un autre et s'exprime à partir de la métrique par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left[ \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right] \quad (1.19)$$

#### La courbure

La différence cruciale entre un espace plat et un espace courbe est que dans ce dernier, le résultat du transport parallèle<sup>7</sup> d'un point vers un autre d'un tenseur va dépendre du chemin emprunté pour s'y rendre.

Pour illustrer le mécanisme du transport parallèle, prenons l'exemple de la sphère (voir figure 1.1). Partons avec un vecteur au niveau de l'équateur pointant vers une ligne de longitude constante. Transportons le jusqu'au pôle Nord le long de cette ligne de longitude constante. Repartons du point initial avec le même vecteur et transportons le parallèlement le long de l'équateur. Transportons le maintenant vers le pôle Nord comme précédemment. Nous voyons clairement sur la figure 1.1 que le même vecteur transporté par deux chemins différents au pôle Nord arrive avec deux orientations différentes.

Il apparaît donc qu'il n'y a pas de moyen unique de transporter un vecteur. Nous pouvons toujours le transporter parallèlement, mais le résultat dépend du chemin suivi, et il n'y a pas de choix naturel pour le chemin à suivre.

Ainsi, nous devons admettre que deux vecteurs ne peuvent être comparés naturellement que s'ils appartiennent au même espace tangent.

---

<sup>6</sup>Opération de dérivée partielle indépendamment du système de coordonnées.

<sup>7</sup>Déplacer un tenseur (ou vecteur) en le gardant parallèle à lui même tout au long du chemin.

---

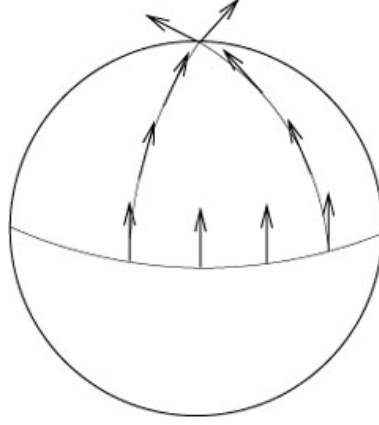


FIG. 1.1: Transport parallèle d'un vecteur sur une sphère.

Maintenant que nous avons décrit le mécanisme de transport parallèle et les dérivées covariantes, nous pouvons aborder la courbure proprement dite.

La connection conventionnelle de Christoffel (1.19) associée à une métrique Euclidienne ou de Minkowski dispose d'un certain nombre de propriétés que nous pouvons associer à la “platitude” : conservation du vecteur lorsqu'il est transporté le long d'un contour fermé ; commutativité des dérivées covariantes des tenseurs ; les géodesiques<sup>8</sup> initialement parallèles le restent.

Le tenseur de Riemann est introduit pour étudier comment ces propriétés sont altérées dans un contexte plus général. L'altération d'un vecteur transporté parallèlement sur une courbe fermée (par exemple une sphère) dépend de la courbure totale de la boucle parcouru. Le tenseur de Riemann nous procure en tout point, une description locale de la courbure. Une manière classique d'introduire le tenseur de Riemann est d'effectuer un transport parallèle le long d'une boucle infinitésimale. Le résultat est le suivant :

$$R_{\mu\nu\alpha}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\alpha\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (1.20)$$

En contractant deux indices ( $\mu$  et  $\nu$ ), nous en déduisons le tenseur de Ricci :

$$R_{\mu\alpha} \equiv R_{\mu\lambda\alpha}^{\lambda} \quad (1.21)$$

Le tenseur de Ricci associé à une connection métrique<sup>9</sup> est symétrique, du fait des symétries du tenseur de Riemann.

En contractant une dernière fois, nous obtenons le scalaire de courbure :

$$R \equiv R_{\alpha}^{\alpha} \quad (1.22)$$

---

<sup>8</sup>Courbe transportée parallèlement à elle-même, la plus droite possible sur une variété. Si une notion de longueur existe (donc une métrique mais ce n'est pas une propriété obligatoire pour une variété en général), la géodésique sera la courbe qui parcourt un chemin extrémal.

<sup>9</sup>Permet de comparer des éléments voisins d'un espace courbe.

---

Le tenseur de Riemann est nul loin des champs de gravitation, et nous retrouvons la métrique de Minkowski dans ce cas. La propriété majeure de ces nouveaux tenseurs tient dans les identités de Bianchi qui relient leurs dérivées premières :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx^\eta} R_{\lambda\mu\nu\alpha} + \frac{d}{dx^\alpha} R_{\lambda\mu\eta\nu} + \frac{d}{dx^\nu} R_{\lambda\mu\alpha\eta} &= 0 \\ \frac{d}{dx^\mu} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) &= 0\end{aligned}\tag{1.23}$$

#### 1.3.1 La Relativité Générale en champ faible

L'hypothèse de champ faible revient à décomposer la métrique  $g_{\mu\nu}$  en une somme de deux composantes : la métrique de Minkowski utilisée dans le formalisme de la Relativité Restreinte décrivant un espace-temps plat et une perturbation supposée petite  $h_{\mu\nu}$  :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1\tag{1.24}$$

Au premier ordre en  $|h|$ , le tenseur de Ricci (1.21) s'approxime par :

$$R_{\mu\nu} \simeq \frac{\partial \Gamma_{\lambda\nu}^\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda}\tag{1.25}$$

La connection affine (1.19) se simplifie en :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\alpha} \left[ \frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right]\tag{1.26}$$

Dans la partie qui a précédé, nous avons introduit les outils indispensables pour pouvoir expliciter la suite d'opérations nécessaires à l'obtention des ondes gravitationnelles. A partir des approximations de champs faible (1.24 et 1.25), nous résolvons les équations d'Einstein (1.7) avec le choix de jauge suivant :

$$\frac{\partial h_\nu^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial h_\mu^\nu}{\partial x^\nu}\tag{1.27}$$

De façon générale, nous trouvons :

$$\square h_{\mu\nu} = 0\tag{1.28}$$

Le d'Alembertien est défini comme le Laplacien à 4 dimensions :

$$\square = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

L'équation 1.28 est semblable à l'équation d'onde que nous rencontrons en électromagnétisme sans présence de source.

Dans le vide, nous cherchons les solutions sous forme d'ondes planes :

$$h_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ikx} \quad (1.29)$$

où  $k$  est le quadrivecteur d'onde et les  $C_{\mu\nu}$  sont des tenseurs de Lorentz symétriques définissant les amplitudes de l'onde gravitationnelle et devant vérifier les équations de propagation et de jauge qui suivent :

$$k_\mu k^\mu = 0 \quad (1.30)$$

$$k_\mu C^\mu_\nu = \frac{1}{2} k_\nu C^\mu_\mu \quad (1.31)$$

Le tenseur  $C_{\mu\nu}$  est symétrique, il possède dix composantes indépendantes. Les quatre conditions de jauge (1.31) fournissent quatre contraintes supplémentaires réduisant le nombre de composantes indépendantes à six.

L'invariance par les transformations de jauge permet d'effectuer un changement de coordonnées :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, il est possible de choisir le quadrivecteur  $\epsilon^\mu$  tel que nous n'ayons plus que deux composantes indépendantes et ainsi imposer à  $C_{\mu\nu}$  les contraintes suivantes :

$$C_{0\nu} = 0 \quad (1.32)$$

$$C_{11} = -C_{22} \quad (1.33)$$

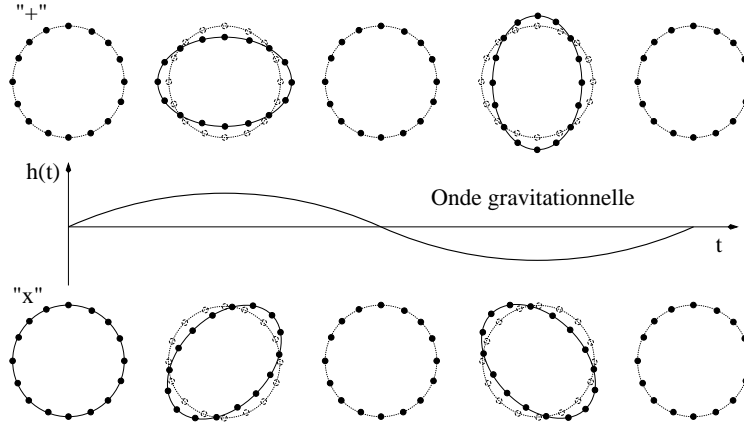
Dans le cas d'une onde gravitationnelle plane se propageant dans la direction  $Oz$  dans le sens des  $z$  croissants, nous avons  $h = (h_+ C_+ + h_\times C_\times) e^{i(kz - \omega t)}$  avec :

$$C_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Dans ce système de coordonnées, la matrice  $C_{\mu\nu}$  a une trace nulle, et les ondes gravitationnelles sont transverses comme les ondes électromagnétiques. Ces propriétés donnent au repère utilisé le nom de jauge TT (Transverse, Traceless).

L'onde gravitationnelle possède deux états de polarisation – “+” et “×” – qui modifient de manière différente la courbure de l'espace-temps.

Imaginons qu'un anneau de particules sans interaction entre elles se trouve dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde gravitationnelle de polarisation “+”. Lors du passage de l'onde gravitationnelle, il y a simultanément une contraction et une dilatation des longueurs dans deux directions perpendiculaires : c'est un effet différentiel. Une demi-période plus tard, l'effet du passage de l'onde gravitationnelle est inversé.



**FIG. 1.2:** Effet du passage d'une onde gravitationnelle polarisée "+" ou "x" en incidence normale sur un anneau de masses-test. Dans les deux cas, il y a simultanément une contraction et une dilatation des longueurs dans deux directions perpendiculaires.

Selon sa polarisation, les oscillations de l'anneau diffèrent, comme le montre la figure 1.2.

Nous venons de voir que l'onde gravitationnelle perturbe localement l'espace-temps. La distance entre deux corps est modifiée proportionnellement à l'amplitude de l'onde gravitationnelle et cette distance est donnée par l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.35)$$

Soit le repère orthonormé  $(x, y, z)$  et considérons une propagation de la lumière le long de la direction  $x$ .

Si  $dx^\mu$  est le vecteur élémentaire d'espace-temps séparant deux événements rencontrés par la lumière, nous pouvons écrire :

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$$

Considérons maintenant l'expérience dans laquelle la lumière est d'abord émise à l'abscisse  $x = 0$  au temps  $t_e$ , et parcourt une longueur  $L$  ( $x = L > 0$ ) en un temps  $t_r$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_0^L dx &= c \int_{t_e}^{t_r} dt + \frac{1}{2} c \int_{t_e}^{t_r} h(t) dt \\ L &= c (t_r - t_e) + \frac{1}{2} c \int_{t_e}^{t_r} h(t) dt \end{aligned} \quad (1.36)$$

Donc le temps  $\Delta t$  mis par la lumière pour parcourir la longueur  $L$  est :

$$\Delta t = t_r - t_e = \frac{L}{c} - \frac{1}{2} \int_{t_e}^{t_r} h(t) dt \quad (1.37)$$

Au premier ordre en  $h$ , nous avons :

$$\Delta t = \frac{L}{c} - \frac{1}{2} \int_{t_r - \frac{L}{c}}^{t_r} h(t) dt \quad (1.38)$$

où la différence de temps due à l'onde gravitationnelle est :

$$\delta t_{og} = \frac{1}{2} \int_{t_r - \frac{L}{c}}^{t_r} h(t) dt \quad (1.39)$$

La variation de temps de parcours de la lumière peut s'interpréter comme une variation de longueur du chemin optique  $\delta L_{og} = c \delta t_{og}$  :

$$\delta L_{og} = \frac{c}{2} \int_{t_r - \frac{L}{c}}^{t_r} h(t) dt \quad (1.40)$$

Si l'onde gravitationnelle est constante d'amplitude  $h$  durant le temps d'intégration, au passage d'une onde gravitationnelle, une longueur  $L$  varie de  $\delta L_{og}$  avec :

$$\delta L_{og} = \frac{h}{2} \times L \quad (1.41)$$

### 1.3.2 Rayonnement d'onde gravitationnelle

La région émettrice d'onde gravitationnelle doit être très petite par rapport à la longueur d'onde de l'onde gravitationnelle ( $\lambda_{og} = 2\pi \frac{c}{\omega}$ ). Cette condition fixe le domaine à partir duquel nous pouvons définir l'onde gravitationnelle.

Nous devons résoudre l'équation d'Einstein avec un terme de source non nul. Dans ces conditions, les solutions prennent la forme des potentiels retardés :

$$h_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int_V \frac{T_{\mu\nu} \left( t - \frac{r}{c}, \vec{x} \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \quad (1.42)$$

avec  $r$  la distance à laquelle se trouve la source.

### Luminosité d'une source d'onde gravitationnelle

La luminosité gravitationnelle ou l'énergie rayonnée par unité de temps par une source gravitationnelle s'écrit :

$$\mathcal{L} = r^2 \int_{\text{Sphère de rayon } r} c t_{00} d\Omega$$

avec la densité d'énergie  $t_{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \ddot{h}_+^2 + \ddot{h}_\times^2 \rangle$  et l'angle solide  $\Omega$ .

En introduisant les moments quadripolaires réduits :

$$Q_{ij} = q_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{kl} q_{kl}$$

nous obtenons la formule du quadripôle d'Einstein :

$$\mathcal{L} = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (1.43)$$

### 1.3. LES ONDES GRAVITATIONNELLES

---

Le rayonnement gravitationnel est de nature quadrupolaire (1.43) ce qui signifie que la source doit posséder une grande asymétrie. De plus, les amplitudes des ondes gravitationnelles sont extrêmement faibles, du au terme  $G/5c^5 \approx 10^{-53} \text{ W}^{-1}$ . Ceci exclut la possibilité d'obtenir des ondes gravitationnelles en laboratoire. Les sources potentielles d'onde gravitationnelle sont donc d'origine cosmique.

La relation 1.43 peut se réécrire de tel sorte à faire apparaître les caractéristiques physiques essentielles d'une source d'onde gravitationnelle :

$$\mathcal{L} \sim \frac{c^5}{G} \epsilon^2 \left( \frac{R_s}{R} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 \quad (1.44)$$

où

- $\epsilon$  mesure l'asymétrie de la source
- $R$  est l'extension spatiale de la source
- $v$  est la vitesse de la source
- $R_s$  est le rayon de Schwarzschild <sup>10</sup>
- $G$  est la constante de gravitation de Newton

En définissant le facteur de compacité  $\mathbb{C} = \frac{R_s}{R}$ , l'expression de la luminosité devient :

$$\mathcal{L} \sim \frac{c^5}{G} \epsilon^2 \mathbb{C}^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 \text{ avec } \mathbb{C} \leq 1 \quad (1.45)$$

La table 1.1 [20] présente quelques valeurs typiques de ce facteur.

Corps	Trou Noir	Etoile à Neutrons	Naine Blanche	Le Soleil	La Terre
$\mathbb{C}$	1	0.3	$10^{-4}$	$4.3 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$

**TAB. 1.1:** Facteurs de compacité  $\mathbb{C}$  typiques.

Par conséquent, seuls des objets astrophysiques compacts, asymétriques et dont la vitesse caractéristique est proche de la vitesse de la lumière peuvent rayonner une quantité significative d'ondes gravitationnelles.

#### Autres formalisme pour l'étude des ondes gravitationnelles

Beaucoup de travail théorique est fait pour comprendre les processus à l'origine des ondes gravitationnelles et ainsi avoir une idée des formes d'ondes que nous pourrions rencontrer. Selon les cas de figures étudiés, différents formalismes sont utilisés.

La théorie post-newtonnienne (PN) est très utilisée pour l'étude des systèmes binaires d'astres compacts. Il s'agit d'une théorie perturbative dont le développement est en  $\frac{v}{c}$ . Le premier terme de ce développement est la loi de la gravitation universelle de Newton auxquelles s'ajoutent par la suite des termes de corrections.

Si nous nous intéressons à la source émettrice d'onde gravitationnelle, le champ gravitationnel pris en compte est très fort et dans ce cas le traitement linéaire des équations d'Einstein est inadapté. La relativité numérique permet de travailler dans ces conditions. Il s'agit de manipuler les équations d'Einstein en utilisant les outils de l'analyse numérique.

---

<sup>10</sup>Diamètre du trou noir de même masse que l'astre considéré; pour la Terre 9 mm.



Comme conditions initiales à ce type de simulation, des modèles bien compris de sources d'ondes gravitationnelles sont utilisés, comme par exemple les systèmes binaires d'astres compacts décrits de manière très juste par la théorie post-newtonienne.

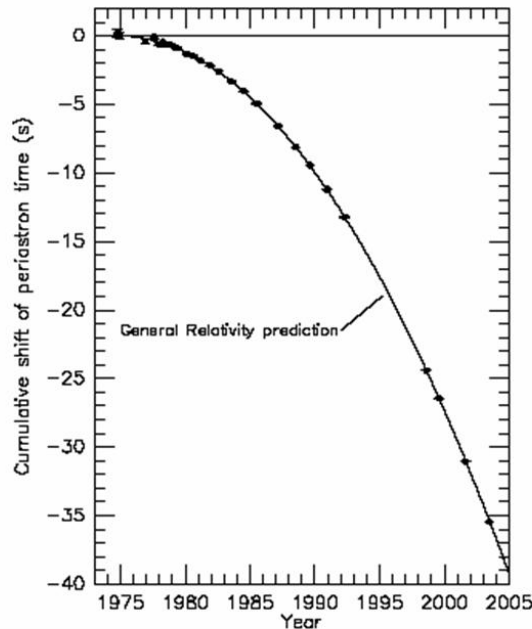
### 1.3.3 Réalité des ondes gravitationnelles

La preuve de la réalité des ondes gravitationnelles a été apportée par l'étude d'un système d'étoiles binaires possédant un pulsar : PSR B1913+16. Ce système a été découvert en 1974 par Hulse et Taylor [11].

#### Le pulsar PSR B1913+16

Le système PSR B1913+16 est composé de deux étoiles à neutrons dont un pulsar de période de rotation d'environ 59 ms situé à 5 kpc<sup>11</sup>. Ce système perd de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles et ceci a pour conséquences principales :

- la diminution de la période orbitale du système (période de l'ordre de 8 heures aujourd'hui) ;
- un mouvement en spirale qui rapproche les étoiles l'une de l'autre et qui entraînera la coalescence des deux astres dans quelques centaines de millions d'années. Cet événement sera producteur d'une puissante émission d'ondes gravitationnelles qui serait aisément détectable par Virgo grâce à sa proximité.



**FIG. 1.3:** Décroissance orbitale du système binaire PSR B1913+16. La parabole illustre la décroissance orbitale théorique dû à l'émission d'onde gravitationnelle prévu par la Relativité Générale.

<sup>11</sup>Un parsec (pc) vaut environ 3.26 années-lumière; le diamètre de la Voie Lactée est d'environ 20 kpc.

Le formalisme quadrupolaire (1.43) rend très bien compte de la dynamique de ce type de système comme le montre la figure 1.3 bien que nous soyons en champ gravitationnel fort [12].

L'étude de ce système a permis à Hulse et Taylor d'obtenir le prix Nobel de Physique en 1993 [13]. Cette étude fût le premier test de la Relativité Générale en champ fort et a mis en évidence la réalité des ondes gravitationnelles.

Une étude semblable a été entreprise sur le pulsar binaire PSR 1534+12 [14]. Le taux de décroissance de sa période est environ dix fois plus faible que pour PSR B1913+16.

#### **Le système binaire des pulsars PSR J0737-3039A et PSR J0737-3039B**

Sa découverte a été faite en avril 2003 et permet à la fois de tester encore mieux la théorie de la Relativité Générale et de donner un taux d'occurrence d'événement détectable plus précis pour les instruments tel que Virgo.

Le système binaire est composé de deux pulsars dont l'un PSR J0737-3039A a une période de rotation de 22.7 ms et l'autre PSR J0737-3039B une période de rotation de 2.7s. L'orbite a une excentricité  $e \sim 0.09$  ce qui la rend sensiblement elliptique et allongée. La masse totale du système binaire est de l'ordre de  $2.58 M_{\odot}$ <sup>12</sup> donnant une masse maximale pour PSR J0737-3039A de  $1.34 M_{\odot}$  et pour son compagnon PSR J0737-3039B de l'ordre de  $1.24 M_{\odot}$ .

La distance estimée de ce système par une méthode d'absorption de rayons X donne une valeur proche de 1 kpc ce qui est plus faible que pour le système PSR B1913+16. Les pulsars PSR J0737-3039A et PSR J0737-3039B vont coalescer dans approximativement 85 millions d'années, une durée 3.5 fois plus courte que pour le système PSR B1913+16.

Une méthode précise pour estimer le taux de coalescence  $\mathcal{R}_k$  des systèmes binaires provient de la comparaison de la luminosité entre les pulsars. Si nous supposons une distance de 1 kpc pour le système binaire J0737-3039, sa luminosité est  $L_{0737} \sim 30 \text{ mJy kpc}^2$ . Cette luminosité est plus faible que celle du pulsar PSR B1913+16 :  $L_{1913} \sim 200 \text{ mJy kpc}^2$ . Pour une distribution plane et homogène de pulsars dans la Galaxie, le rapport  $\mathcal{R}_{0737}/\mathcal{R}_{1913} \sim 2 L_{1913}/L_{0737}$  soit  $\mathcal{R}_{0737}/\mathcal{R}_{1913} \sim 12$ .

Par rapport aux précédentes mesures faites sur des systèmes binaires tel que PSR B1913+16 et PSR 1534+12, le taux de coalescence des systèmes binaires a augmenté de quasiment un ordre de grandeur. Avec cette nouvelle valeur, le taux maximal d'événements détectables par Virgo ou LIGO (voir Chapitre 2) est aujourd'hui de 3 par an [15].

Ce système de double pulsar est également un laboratoire de test supplémentaire et inédit pour la Relativité Générale en présence d'un champ gravitationnel fort. Les effets relativistes sont plus aisément mesurables car l'excentricité du système est de l'ordre de celle rencontrée avec Mercure et que les faisceaux des deux pulsars balayent la Terre. Ceci a permis de mesurer pour la première fois 5 paramètres post-newtoniens mais également l'effet engendré par la rotation de l'étoile à neutrons sur le mouvement orbital par le couplage spin-orbite [16].

---

<sup>12</sup> $M_{\odot}$  = masse du Soleil.

---

## 1.4 L'astronomie gravitationnelle

### 1.4.1 Une nouvelle fenêtre sur l'univers

Comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, les ondes gravitationnelles peuvent avoir un comportement analogue à celui des ondes électromagnétiques, dans le calcul.

Qu'est-ce qui différencie ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles [17] ?

- Les ondes électromagnétiques sont des oscillations du champ électromagnétique qui se propagent dans l'espace-temps ; les ondes gravitationnelles sont des oscillations de l'espace-temps lui même.
- Les ondes électromagnétiques sont très souvent la superposition incohérente d'émission de particules individuelles. Les ondes gravitationnelles sont créées par le mouvement très rapide ( $v \sim c$ ) et cohérent de grandes masses.
- La longueur d'onde des ondes électromagnétiques est plus petite que la taille de leur source ce qui nous permet de faire une photographie de cette source. La longueur d'onde de l'onde gravitationnelle est comparable ou plus grande que la taille de la source : nous ne pouvons pas faire une image de la source.
- Les ondes électromagnétiques interagissent facilement avec la matière. Les ondes gravitationnelles ont très peu d'interaction avec la matière.
- La bande de fréquence des ondes électromagnétiques est supérieure à  $10^7$  Hz. Pour les ondes gravitationnelles, elle est inférieure à  $10^4$  Hz.
- La quantité que nous mesurons,  $h$ , est une amplitude :  $h \propto \frac{1}{r}$  avec  $r$  la distance qui sépare la source du détecteur d'onde gravitationnelle. Pour une onde électromagnétique, la quantité mesurable est une puissance proportionnelle à  $\frac{1}{r^2}$ . Ainsi, doubler la sensibilité du détecteur d'onde gravitationnelle double la distance de détection et multiplie par huit le volume de détection.

La comparaison de la nature de ces deux types d'onde nous montre que l'information véhiculée par l'onde gravitationnelle sera très différente de celle des ondes électromagnétiques. Nous porterons d'autres regards sur notre univers.

### 1.4.2 Les sources d'ondes gravitationnelles

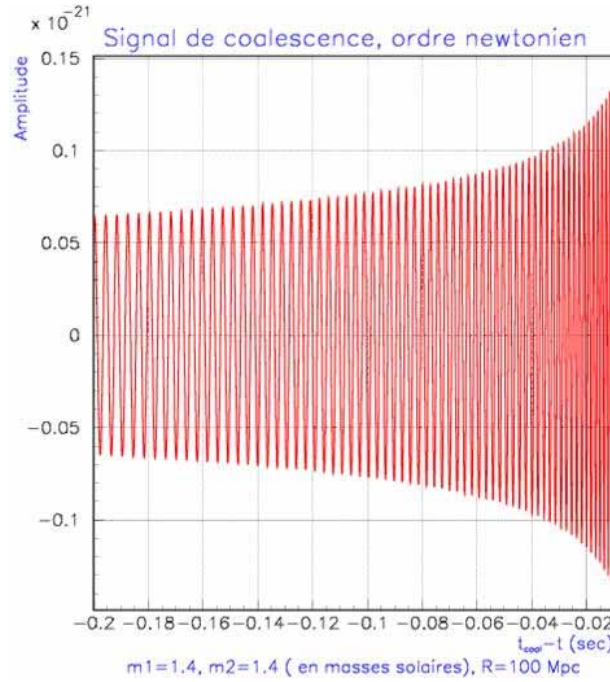
Un détecteur comme Virgo est sensible à l'amplitude  $h$  de l'onde gravitationnelle (proportionnelle à l'inverse de la distance), dans une bande de fréquence comprise entre quelques Hz et 10 kHz (la demi-fréquence d'échantillonnage), contraintes dues aux différents bruits du détecteur.

La sensibilité attendue pour Virgo est (voir chapitre 2) :

$$\begin{cases} 10^{-21}/\sqrt{\text{Hz}} @ 10 \text{ Hz} \\ 3 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}} @ 1 \text{ kHz} \end{cases} \quad (1.46)$$

Connaître l'amplitude de l'onde gravitationnelle n'est pas suffisante, il est nécessaire d'évaluer le taux d'occurrence des événements astrophysiques émettant suffisamment d'ondes gravitationnelles pour être détectés par Virgo. Les prédictions de ce taux varient énormément dans la littérature et évoluent rapidement à mesure que nos connaissances progressent. Dans ce qui suit, un panorama des sources d'onde gravitationnelle est présenté.

### Coalescence de systèmes binaires et oscillations de trou noirs



**FIG. 1.4:** Signal caractéristique d'une onde gravitationnelle produite par une coalescence d'un système binaire dans sa phase spiralante. L'amplitude et la fréquence de l'onde gravitationnelle augmentent avec le rapprochement des deux astres.

Le système est composé de deux astres compacts qui tournent l'un autour de l'autre (par exemple le système binaire PSR J0737-3039A et PSR J0737-3039B, se reporter au paragraphe 1.3.3). À cause de la perte d'énergie par émission d'ondes gravitationnelles, les objets ont un mouvement en forme de spirale et se rapprochent l'un de l'autre. Le phénomène de coalescence d'astres compacts (BH/BH, BH/NS ou NS/NS<sup>13</sup>) met en jeu une dynamique complexe qui peut être découpée en trois phases caractéristiques [18].

*1<sup>ère</sup> phase :* Les deux astres tombent l'un vers l'autre avec un mouvement en forme de spirale. L'onde gravitationnelle produite est très bien modélisée. Au fur et à mesure de la coalescence, la fréquence et l'amplitude des ondes gravitationnelles augmentent comme le montre la figure 1.4. L'onde gravitationnelle émise peut être détectée dans les derniers instants de vie du système binaire.

*2<sup>ème</sup> phase :* Fusion des deux astres, avec création possible d'un trou noir ; le signal de l'onde gravitationnelle est mal modélisé, pour ainsi dire inconnu.

<sup>13</sup>Anglais : BH (Black Hole) = Trou Noir ; NS (Neutron Star) = Etoile à Neutrons.

*3<sup>ème</sup> phase* : Si un trou noir est formé par la fusion des deux astres, il se désexcite et libère une partie de son énergie sous forme d'onde gravitationnelle. Le signal d'onde gravitationnelle peut être décrit sous forme de superposition de modes propres de vibration du trou noir. Après une éventuelle phase transitoire (forme de signal inconnue), l'émission peut être considérée comme quasi monochromatique et prend la forme d'un sinus amorti.

La masse des astres mis en jeu quantifie le poids de chacune de ces phases dans l'onde gravitationnelle mesurée :

- $M \leq 24 M_{\odot}$  : Le signal provenant du mouvement en spirale est prépondérant. Par exemple, pour un système binaire de deux étoiles à neutrons de masses  $M = 1.4 M_{\odot}$ , l'amplitude de l'onde gravitationnelle est donnée par :

$$h \sim 10^{-23} \left( \frac{R}{10 \text{ Mpc}} \right)^{-1} \left( \frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right)^{5/3} \left( \frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^{2/3} \quad (1.47)$$

- $24 M_{\odot} \leq M \leq 200 M_{\odot}$  : Le signal provenant de la fusion est prépondérant.
- $M \geq 200 M_{\odot}$  : Les signaux provenant de la fusion et de la désexcitation du trou noir sont équivalents.

L'observation des ondes gravitationnelles issues de la coalescence des systèmes binaires aura des conséquences importantes pour la cosmologie et l'astrophysique :

- il permettra de donner des limites sur les masses des objets compacts ;
- l'observation détaillée de la phase de fusion, comparée à des simulations numériques permettra de distinguer les astres mis en jeu dans la coalescence. En ce qui concerne les étoiles à neutrons, des contraintes importantes pourront être apportées sur les équations d'état de la matière ultra-dense ;
- l'observation des ondes gravitationnelles en coïncidence avec des sursauts gamma confirmerait l'hypothèse de la coalescence de deux étoiles à neutrons comme source des sursauts gamma ;
- l'observation d'événements par différents détecteurs d'ondes gravitationnelles permettra de corrélérer la distribution des coalescences avec la distribution optique des amas de galaxies. La distance d'une galaxie est aujourd'hui mesurée par l'utilisation des chandelles standards (supernovæ). La détection de l'onde gravitationnelle permettra de remonter également à cette distance. Le fait de bien connaître théoriquement la forme de l'onde gravitationnelle (cas des coalescences de systèmes binaires) qui ne dépend pas de la distance permettra de remonter à cette distance en comparant l'amplitude d'émission de l'onde gravitationnelle à celle détectée. Dès lors, la mesure de distance sera plus précise. Nous pourrons ainsi raffiner le modèle cosmologique existant en apportant une meilleure précision pour différents paramètres cosmologiques comme la constante de Hubble, le paramètre de décélération, la constante cosmologique...

### Supernovæ

Les supernovæ sont des événements extrêmement violents dont la luminosité optique peut atteindre celle d'une galaxie. Le résidu de l'explosion dépend de la masse initiale de l'astre au regard de la masse de Chandrasekhar<sup>14</sup>. Pour une masse inférieure à la masse de Chandrasekhar, l'effondrement de l'étoile produit une naine blanche. Entre 1.44 et environ 8 masses solaires, la contraction se poursuit jusqu'à ce que les électrons et les protons des noyaux fusionnent en neutrons, et nous obtenons une étoile à neutrons. Au-delà de 8 masses solaires, rien n'arrête la contraction et nous aboutissons à un trou noir. Nous allons dans ce qui suit décrire plus longuement les processus à l'origine de l'explosion des supernovæ.

Les supernovæ ont été divisées en deux classes en 1940 par R. Minkowski. Cette classification repose sur la présence (type II) ou l'absence d'hydrogène (type I) dans leur spectre.

Les supernovæ de type Ia sont les plus lumineuses et apparaissent dans tous les types de galaxies. Les autres types de supernovæ n'ont jamais été observés dans les galaxies elliptiques. Les spectres des supernovæ de type Ib, Ic et II sont très similaires mise à part les signatures dues à la présence d'hydrogène. Ceci nous indique que les phénomènes à la base des types Ia et des autres types (Ib, Ic et II) sont de natures différentes.

Dans la littérature, il est admis que les progéniteurs des supernovæ de type Ib, Ic et II appelées aussi supernovægravitationnelles sont des étoiles de grandes masses ( $8 M_{\odot}$  et plus). Les étoiles brûlent tour à tour par réaction de fusion leur hydrogène, leur hélium jusqu'à arriver au fer<sup>15</sup> pour atteindre une structure dite en pelure d'oignon depuis le fer dans le coeur jusqu'à l'hydrogène au niveau de l'enveloppe externe.

La température et la pression du coeur de l'étoile n'ont cessé d'augmenter au cours du processus de fusion qui a toujours lieu au niveau des différentes couches de l'étoile pour atteindre une température de quelques milliards de Kelvin et une densité proche de la densité nucléaire (quelques  $10^{14} \text{ kg.m}^{-3}$ ).

À cette densité, par le principe d'exclusion de Pauli<sup>16</sup>, la pression dans le coeur de l'étoile est essentiellement portée par le gaz dégénéré d'électrons.

Lorsque la masse de fer du coeur atteint la masse critique de Chandrasekhar, la pression du gaz d'électrons ne peut plus contrebalancer la gravitation et le coeur commence à s'effondrer.

L'augmentation de densité et de température consécutive à l'effondrement ne peut amorcer de nouvelles réactions nucléaires (qui dégageraient de l'énergie pour s'opposer à l'effondrement) puisque le fer ne fusionne pas de manière exothermique. Bien au contraire, la résistance de la matière diminue car les électrons (qui contribuent majoritairement à la pression) sont capturés par les noyaux de fer au fur et à mesure que la densité augmente.

De plus, une partie de l'énergie dégagée par la compression est utilisée dans la photodissociation du fer et ne sert donc pas non plus à compenser l'effet de la gravitation. Nous assistons ainsi à un emballement de l'effondrement. Ce dernier ne s'arrête que lorsque la densité nucléaire est atteinte, environ 20 ms après le début de l'effondrement. Les noyaux sont alors complètement dissociés et la matière est majoritairement constituée de neutrons.

---

<sup>14</sup>La masse de Chandrasekhar est une limite de stabilité entre la pression de radiation des électrons et la gravitation des étoiles et vaut  $\sim 1.44 M_{\odot}$ . Cette valeur dépend de l'équation d'état utilisée.

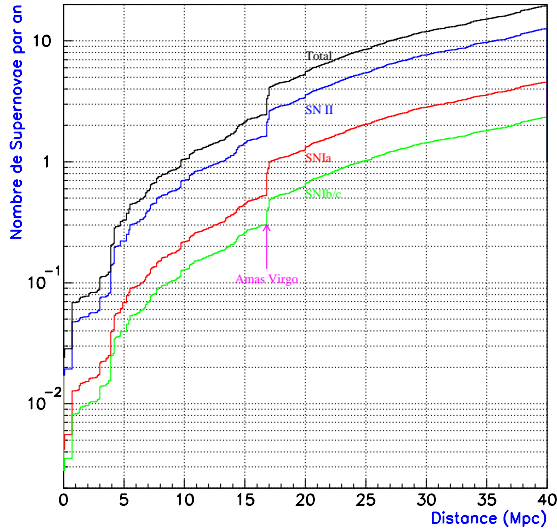
<sup>15</sup>Élément le plus stable de la nature car il possède la plus grande énergie de liaison par nucléon (8.8 MeV).

<sup>16</sup>Deux fermions (électrons, nucléons ...) ne peuvent occuper le même état quantique.

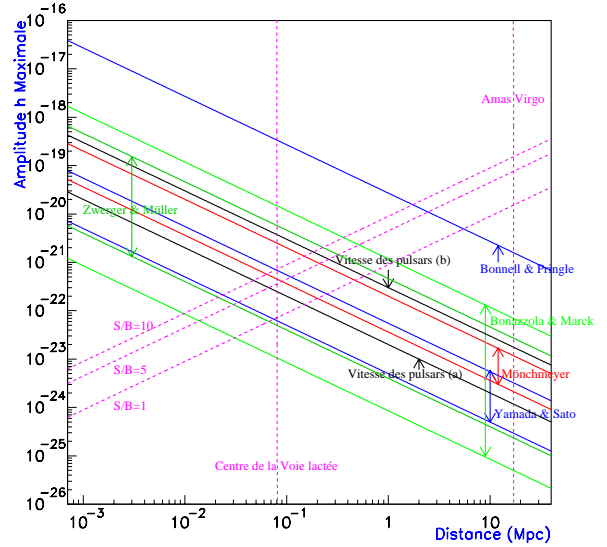
---

A cette densité, par le principe d'exclusion de Pauli la pression est essentiellement portée par le gaz dégénéré de neutrons qui s'oppose à l'effondrement. Le noyau devient brutalement incompressible alors que les couches externes continuent à s'effondrer. Une onde de choc est alors créée à l'intérieur du noyau et se propage vers l'extérieur. Nous parlons de rebond. Si l'onde de choc est suffisamment puissante, elle provoque l'expulsion des couches externes de l'étoile : l'étoile explose.

En ce qui concerne les supernovæ de type Ia, il est établi qu'elles sont le fruit de l'explosion d'une naine blanche, composée de carbone et d'oxygène, accrétant la matière d'un compagnon au sein d'un système binaire. En accrétant la matière de son compagnon, elle va augmenter sa masse jusqu'à atteindre celle de Chandrasekhar conduisant à son effondrement selon le scénario de la supernova gravitationnelle. Cependant, l'amplitude de l'onde gravitationnelle est vraiment faible et a très peu de chance de pouvoir être détectée.



**FIG. 1.5:** Nombre de supernovæ par an en fonction de la distance de surveillance en Mpc, estimé à partir du catalogue de Tully[23]. La constante de Hubble à la valeur  $H_0 = 75$  km/sec/Mpc.



**FIG. 1.6:** Comparaison des amplitudes maximales prédites pour des événements de supernovæ en fonction de la distance à la source. Six courbes correspondent à des résultats obtenus en simulation et sont labellés par les initiales de leurs auteurs : **B & M** [24], **Z & M** [25], **M** [26], **B & P** [27] et **Y & S** [28]. Les deux traits restants sont des limites obtenus par des mesures de vitesse sur des pulsars : **PV (a)** [29] et **PV (b)** [30].

Nous avons décrit rapidement le mécanisme des supernovæ [21]. Une bouffée (burst) d'ondes gravitationnelles peut être émise pendant la phase d'effondrement de l'étoile si la dynamique est non sphérique. Comme la physique de l'effondrement est très mal connue, les amplitudes et les formes des ondes émises par les supernovæ varient de plusieurs ordres de grandeur selon les modèles théoriques. Les figures 1.5 et 1.6 présentent respectivement le nombre de supernovæ par an en fonction de la distance de surveillance en Mpc, et la comparaison des amplitudes maximales prédites pour des événements de supernovæ en fonction de la distance de la source [22].

Au niveau de l'amas de VIRGO<sup>17</sup>, l'onde gravitationnelle a une amplitude insuffisante pour être détecté par l'interféromètre Virgo. Seuls des événements dans notre Galaxie ont une grande probabilité d'être détectés.

### Sources périodiques

L'explosion en supernova d'une étoile suffisamment massive peut donner naissance à une étoile à neutrons. L'étoile à neutrons ainsi créée peut être pourvue d'une très grande vitesse de rotation et d'un moment magnétique non parallèle à l'axe de rotation. Cette asymétrie engendre l'émission d'un faisceau d'onde radio qui balaye périodiquement l'espace. Ce type de source est connu depuis les années 60 et porte le nom de pulsar.

L'asymétrie  $\epsilon$  entre l'axe de rotation et l'axe magnétique du pulsar génère des ondes gravitationnelles dont la fréquence est le double de la fréquence de rotation de l'étoile et l'amplitude attendue s'écrit [31] :

$$h \sim 10^{-26} \left( \frac{I}{10^{38} \text{ kg m}^2} \right) \left( \frac{10 \text{ kpc}}{r} \right) \left( \frac{f}{100 \text{ Hz}} \right)^2 \left( \frac{\epsilon}{10^{-6}} \right) \quad (1.48)$$

où  $r$  est la distance de la source,  $I$  le moment d'inertie du pulsar autour de son axe de rotation et  $\epsilon$  la variable décrivant le degré d'asymétrie de l'étoile.

La détection de ce type d'onde gravitationnelle nécessite une intégration des données sur de longues périodes pour augmenter le rapport signal sur bruit. C'est une remarque générale, valable pour tout type de sources périodiques.

Récemment d'autres types de sources ont été envisagés comme les jeunes étoiles à neutrons [32, 33] et les binaires X [34, 35].

### Fond stochastique

Deux types de fond stochastiques peuvent être considérés. Il existe certainement un rayonnement de fond stochastique gravitationnel créé par la superposition incohérente des ondes gravitationnelles émises par les étoiles binaires, les supernovæ extragalactiques et par beaucoup d'autres types de sources.

Un autre type de fond stochastique gravitationnel serait un reste du Big Bang. Les ondes gravitationnelles se sont découplées de la matière bien plus tôt que les ondes électromagnétiques (rayonnement à 3K) : à  $t \sim 10^{-43}$ s (temps de Planck) après le Big Bang contre  $t \sim 10^6$ s pour les ondes électromagnétiques. L'observation de ce fond stochastique gravitationnel pourrait donc apporter des informations uniques sur les tous premiers instants de l'univers. Il semble illusoire que Virgo puisse détecter ce fond gravitationnel.

---

<sup>17</sup>Raison du nom donné à l'expérience bien que l'amplitude soit insuffisante.



Comme le fond stochastique ( $\Omega_{og}$ ) est de nature non prédictive, il peut être considéré comme un bruit. La corrélation des données entre différents détecteurs interférométriques permettra ainsi de mettre des contraintes sur  $\Omega_{og}$  : pour Virgo  $\Omega_{og} < 5 \cdot 10^{-6}$ .

Les ondes gravitationnelles vont nous apporter une variété d'information sur des endroits de l'univers mal connus, mettant en jeu d'énormes quantités d'énergies. Cette information est exclusivement mesurable par l'astronomie gravitationnelle et nous pouvons imaginer que nous aurons énormément de surprises.

Nous avons vu dans ce chapitre qu'une onde gravitationnelle perturbe la métrique de l'espace-temps avec une amplitude très faible. Le prochain chapitre va nous montrer comment un détecteur interférométrique comme Virgo peut traduire cette variation de distance infinitésimale en une mesure physique.

# Chapitre 2

## L'interférométrie et Virgo

Le passage d'une onde gravitationnelle produit un effet différentiel sur le parcours de la lumière selon deux axes perpendiculaires. L'interféromètre de Michelson permet la mesure de tels effets comme va le montrer la première partie de ce chapitre. Nous définirons ensuite la sensibilité de l'instrument et nous verrons qu'elle dépend de la puissance de la source laser et du parcours de la lumière. La mesure est perturbée par des bruits à la fois fondamentaux et technologiques. Nous présenterons la stratégie adoptée par Virgo pour y faire face. Enfin, nous ferons un état des lieux des différents instruments en fonctionnement de par le monde.

### 2.1 Principes de détection des ondes gravitationnelles

#### 2.1.1 L'interféromètre de Michelson

Comme vu précédemment, le passage d'une onde gravitationnelle engendre une variation relative de la distance entre deux corps distants d'une longueur  $L$ , variation proportionnelle à l'amplitude de l'onde gravitationnelle :  $\frac{\delta L}{L} = \frac{h}{2}$ .

Une variation de longueur peut être assimilée à un déphasage introduit sur le parcours d'une onde électromagnétique. Elle peut être mise en évidence grâce à un interféromètre. Pour mesurer le déphasage introduit par le passage d'une onde gravitationnelle, nous utilisons un interféromètre de Michelson.

L'interféromètre de Michelson est composé de deux miroirs de fond et d'une lame séparatrice qui divise le faisceau laser en deux. Ensuite, ces faisceaux sont réfléchis par les miroirs d'extrémité des bras et viennent se superposer sur la lame séparatrice comme le montre la figure 2.1.

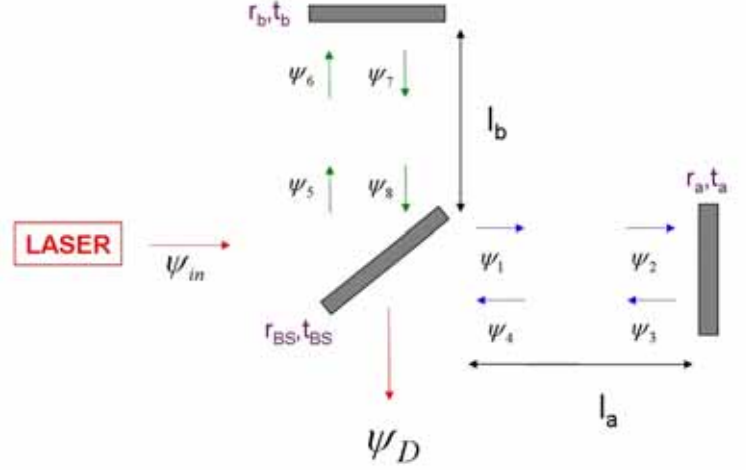
Dans la partie qui va suivre, nous allons montrer comment la détection d'une onde gravitationnelle est possible par l'intermédiaire de l'interférométrie. Au préalable, définissons les conventions d'optiques employées.

**La propagation :** La propagation dans le vide d'un champ électromagnétique sur une distance  $l$  séparant deux points 1 et 2 s'écrit :  $\psi_2 = e^{-ikl} \psi_1 = e^{-i\frac{\omega}{c}l} \psi_1 = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}l} \psi_1$

**Le miroir :** Un miroir  $M$  est caractérisé par trois coefficients :

- sa réflexion en amplitude  $r$ ,
- sa transmission en amplitude  $t$ ,
- ses pertes en puissance  $p$

ces trois paramètres sont reliés par :  $r^2 + t^2 + p = 1$  (Conservation de l'énergie)



**FIG. 2.1:** Représentation schématique des champs circulant dans un interféromètre de Michelson.

Le champ transmis en amplitude s'écrit :  $\psi_t = t \psi_{in}$  (traitement symétrique entre la droite et la gauche du miroir).

Le champ réfléchi en amplitude s'écrit :  $\psi_r = i r \psi_{in}$  (traitement symétrique entre la droite et la gauche du miroir).

En reprenant les conventions de la figure 2.1, les différents champs électromagnétiques sont décrits par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= t_{BS} \psi_{in} & \psi_5 &= i r_{BS} \psi_{in} \\ \psi_2 &= e^{-i \frac{\omega}{c} l_a} \psi_1 & \psi_6 &= e^{-i \frac{\omega}{c} l_b} \psi_5 \\ \psi_3 &= i r_a \psi_2 & \psi_7 &= i r_b \psi_6 \\ \psi_4 &= e^{-i \frac{\omega}{c} l_a} \psi_3 & \psi_8 &= e^{-i \frac{\omega}{c} l_b} \psi_7 \end{aligned}$$

Le champ vu par la photodiode de détection (port antisymétrique) est alors :

$$\psi_D = i r_{BS} \psi_4 + t_{BS} \psi_8 \quad (2.1)$$

La photodiode mesure l'intensité  $|\psi_D|^2$  soit :

$$|\psi_D|^2 = |\psi_{in}|^2 r_{BS}^2 t_{BS}^2 [r_a^2 + r_b^2 + 2 r_a r_b \cos(\phi_{mich})] \quad (2.2)$$

où  $\phi_{mich} \equiv 2 \frac{\omega}{c} \Delta l$  et  $\Delta l = l_b - l_a$ .

Nous définissons le contraste  $C$  par :

$$C = \frac{|\psi_D|_{max}^2 - |\psi_D|_{min}^2}{|\psi_D|_{max}^2 + |\psi_D|_{min}^2} = \frac{2 r_a r_b}{r_a^2 + r_b^2} \quad (2.3)$$

La relation 2.2 se réécrit donc :

$$|\psi_D|^2 = |\psi_{in}|^2 r_{BS}^2 t_{BS}^2 (r_a^2 + r_b^2) [1 + C \cos(\phi_{mich})] \quad (2.4)$$

Si nous considérons maintenant  $r_{BS} = t_{BS} = \sqrt{\frac{1}{2}}$  et  $r_a \simeq r_b \simeq 1$ , alors la relation 2.4 s'écrit :

$$P_D = |\psi_D|^2 = \frac{|\psi_{in}|^2}{2} [1 + C \cos(\phi_{mich})]$$

En l'absence de perturbation du parcours de la lumière, la puissance détectée est :

$$P_D = \frac{P_{in}}{2} [1 + C \cos(\phi_{mich})] \quad (2.5)$$

Lorsque  $\phi_{mich} = 2k\pi$ , la puissance détectée est maximale, l'interféromètre est réglé sur la frange blanche. Lorsque  $\phi_{mich} = 2(k+1)\pi$ , la puissance détectée est minimale, l'interféromètre est réglé sur la frange noire.

Considérons une petite variation de la phase due par exemple au passage d'une onde gravitationnelle autour de la phase  $\phi_0 = 2\frac{\omega}{c}\Delta l$  :

$$\phi_{mich} = \phi_0 + \phi_{og}$$

Puisque  $\phi_{og} \ll 1$ , au premier ordre en  $\phi_{og}$ , l'équation 2.5 se réécrit :

$$P_D = \frac{P_{in}}{2} [1 + C \cos(\phi_0) - C \sin(\phi_0) \phi_{og}] \quad (2.6)$$

Par conséquent, la modification de chemin optique induite par le passage de l'onde gravitationnelle se traduit par une variation de la puissance mesurée sur la photodiode en sortie du détecteur et qui vaut :

$$\delta P_{D_{og}} = \frac{P_{in}}{2} C \sin(\phi_0) \phi_{og} \quad (2.7)$$

L'intérêt d'utiliser un interféromètre de Michelson plutôt qu'un interféromètre comme le Fabry-Perot (voir Annexe A) pour mesurer le déphasage introduit par le passage d'une onde gravitationnelle provient du fait que le signal de frange noire (interféromètre de Michelson) est proportionnel aux asymétries des caractéristiques des bras alors que le signal produit par un Fabry-Perot est une mesure directe de la superposition des bruits et du signal dû à l'onde gravitationnelle. Par conséquent, l'utilisation d'un interféromètre de Michelson réduit l'effet des bruits sur le signal de frange noire utilisé pour détecter le passage de l'onde gravitationnelle.

### 2.1.2 Définir la sensibilité du détecteur

Le signal de frange noire est la superposition du signal produit par l'onde gravitationnelle et de différents bruits à la fois technologiques et instrumentaux qui seront définis par la suite (voir partie 2.4). La courbe de sensibilité mesure cette superposition en équivalent d'amplitude d'onde gravitationnelle et évalue la capacité du détecteur à pouvoir détecter l'onde gravitationnelle.

Considérons un signal  $h(t)$ . La transformée de Fourier de  $h(t)$  est :

$$h(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{2i\pi f t} dt \quad (2.8)$$

Cependant, si la fonction  $h(t)$  est une fonction stationnaire, sa transformée de Fourier diverge. Ainsi, il faut tronquer le domaine de définition de la fonction :

$$\begin{aligned} h_T(t) &= h(t) \text{ pour } -T/2 < t < T/2 \\ h_T(t) &= 0 \text{ en dehors} \end{aligned}$$

alors :

$$h_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t) e^{2i\pi f t} dt \quad (2.9)$$

Définissons maintenant la fonction d'autocorrélation par :

$$R_T(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} h_T^*(t) h_T(t + \tau) dt \quad (2.10)$$

Lorsque  $R_T(\tau_0)$  est maximal, le signal  $h(t)$  a une fréquence caractéristique  $f_0 = 1/\tau_0$ .

La densité spectrale de puissance est définie comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$S_T(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_T(\tau) e^{2i\pi f \tau} d\tau \text{ avec } 0 < f < \infty \quad (2.11)$$

La puissance du signal est alors :

$$\langle |h(t)|^2 \rangle = \int_0^{+\infty} S_T(f) df \quad (2.12)$$

A partir de la densité spectrale de puissance  $S_T(f)$ , nous définissons la densité spectrale d'amplitude par :

$$\tilde{h}(f) = \sqrt{S_T(f)} \quad (2.13)$$

Cette relation s'exprime en Watt/ $\sqrt{\text{Hz}}$  si la mesure est donnée en Watt (exemple du signal de frange noire) et évalue la sensibilité du détecteur.

Pour limiter l'impact en temps de calcul de l'évaluation de la vraie densité spectrale d'amplitude, celle-ci est estimée par le module au carré de la FFT (Fast Fourier Transform), c'est-à-dire :

$$\tilde{h}(f) = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} h(t) e^{2i\pi f t} dt \right|^2} \quad (2.14)$$

Pour évaluer l'impact d'un bruit de position quelconque  $\tilde{x}$  sur la courbe de sensibilité du détecteur, son amplitude en onde gravitationnelle équivalente s'écrit :

$$\tilde{h}(f) = \frac{\tilde{x}(f)}{L}$$

où  $L$  est la longueur physique des bras de l'interféromètre.

---

### 2.1.3 Bruit fondamentaux dans un interféromètre

Les bruits fondamentaux sont le bruit quantique, c'est à dire l'erreur sur la mesure de la position d'une masse libre due au principe d'incertitude de Heisenberg et le bruit thermique, c'est à dire l'incertitude sur la position d'un oscillateur en équilibre thermique avec son environnement. Le premier dérive donc de la mécanique quantique, le deuxième de la thermodynamique. Dans la pratique, la limite quantique n'est pas atteinte car elle est masquée par le bruit de comptage de photon ou shot noise (voir plus loin).

#### La limite quantique

La mécanique quantique impose une limite sur la précision avec laquelle nous pouvons déterminer la position d'un objet. Nous pouvons associer à un objet une fonction d'onde grâce à la relation de De Broglie  $\lambda = \frac{h}{Mv}$ . Si nous voulons mesurer le déplacement d'un objet, nous devons le comparer à la largeur de sa fonction d'onde. Le principe d'incertitude de Heisenberg s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &\sim \hbar \\ \Delta x_{quantique} &\sim \sqrt{\frac{\hbar \Delta t}{M}} \sim \frac{1}{\sqrt{f}} \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \end{aligned} \quad (2.15)$$

où  $M$  est la masse de l'objet,  $\hbar$  est la constante de Planck réduite et  $f$  la bande passante du processus. Par exemple, pour une mesure avec une bande passante de 1 Hz d'un objet de masse  $M = 30$  kg, la position peut être déterminée au mieux avec une précision de  $\Delta x_{quantique} \sim 2 \times 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Si nous utilisons un interféromètre de Michelson possédant des bras de 100 km pour mesurer la position du miroir, la densité spectrale d'amplitude du bruit quantique est alors :

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{quantique} &\sim \frac{\Delta x_{quantique}}{L} \\ \tilde{h}_{quantique} &\sim \frac{1}{\sqrt{f} L} \sqrt{\frac{\hbar}{M}} = 2 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

La limite quantique peut aussi être obtenue comme le point d'intersection entre deux bruits qui interviennent dans les mesures interférométriques : le shot noise et le bruit dû à la pression de radiation (voir page 35).

#### Le shot noise

La détection du signal gravitationnel est limitée par le bruit de comptage des photons. Ce bruit limite la mesure de la phase sur le signal de frange noire. Il est lié à la nature corpusculaire de la lumière et correspond aux fluctuations du nombre de photons arrivant sur la photodiode. Pour une source laser cette distribution suit une statistique Poissonienne. En l'absence d'onde gravitationnelle pendant un temps d'observation  $\Delta t$ , le nombre de photoélectrons  $N$  émis par une photodiode d'efficacité quantique  $\eta$  est donné par :

$$N = \frac{P_{in}}{2} \eta \Delta t \frac{\lambda}{h c} (1 + C \cos(\phi)) \quad (2.17)$$

avec  $\phi = 2 \frac{\omega}{c} \Delta l$ .

La fluctuation de puissance est alors :

$$\delta P_{ShotNoise} = \sqrt{\frac{P_{in}}{2} \frac{h c}{\lambda \eta \Delta t}} \sqrt{1 + C \cos(\phi)} \quad (2.18)$$

Comme le montre l'équation 2.7, le passage d'une onde gravitationnelle engendre une variation de phase  $\phi_{og}$  qui produit une variation de puissance au niveau de la détection :

$$|\delta P_{Dog}| = |C \frac{P_{in}}{2} \sin(\phi) \phi_{og}| \quad (2.19)$$

Pour être capable de détecter le signal produit par le passage de l'onde gravitationnelle, celui-ci doit être supérieure au bruit :  $\delta P_{Dog} > \delta P_{ShotNoise}$ . Nous devons optimiser le rapport signal sur bruit  $S/B$  qui est donné par :

$$S/B = \frac{\delta P_{Dog}}{\delta P_{ShotNoise}} \quad (2.20)$$

L'extréma de la fonction  $\frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1+C \cos(\phi)}}$  est obtenu pour :

$$\cos(\phi) \approx -1 + \sqrt{2(1-C)} \quad (2.21)$$

Si le contraste de l'interféromètre est maximal ( $C = 1$ ) et que nous nous plaçons sur la frange noire  $\cos(\phi) = -1$ , la différence de phase minimale détectable doit vérifier :

$$\delta \phi_{min} > \sqrt{\frac{\hbar \omega}{P_{in} \eta \Delta t}} \quad (2.22)$$

La relation entre la variation de longueur des bras de l'interféromètre et la variation de phase s'exprime à partir de la relation 2.2 par :

$$\delta \phi = \frac{4\pi}{\lambda} \delta L \quad (2.23)$$

Soit :

$$\phi' = \phi + \delta \phi_{og}$$

et :

$$\frac{4\pi}{\lambda} \delta L' = \frac{4\pi}{\lambda} (l_2 + \delta l_{og}) - (l_1 - \delta l_{og})$$

or  $\frac{\delta L}{L} = \frac{h}{2}$ , d'où :

$$\frac{4\pi}{\lambda} \delta L' = \frac{4\pi}{\lambda} \left( l_2 + \frac{h}{2} l_2 \right) - \left( l_1 - \frac{h}{2} l_1 \right)$$

donc :

$$\frac{4\pi}{\lambda} \delta L' = \frac{4\pi}{\lambda} (l_2 - l_1) + h \frac{4\pi}{\lambda} \left( \frac{l_1 + l_2}{2} \right)$$

par conséquent la phase directement due à l'onde gravitationnelle est :

$$\delta \phi_{og} = \frac{4\pi}{\lambda} h \left( \frac{l_1 + l_2}{2} \right) \quad (2.24)$$

En combinant l'équation précédente et l'équation 2.22 pour  $\delta P_{og} = \delta P_{D_{ShotNoise}}$ , nous obtenons la limite de sensibilité du détecteur :

$$\tilde{h}_{ShotNoise} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\frac{l_1+l_2}{2}} \delta\phi_{min}$$

soit en assimilant  $\Delta t$  à la bande passante du processus :

$$\tilde{h}_{ShotNoise} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\frac{l_1+l_2}{2}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\eta P_{in}}} / \sqrt{Hz} \quad (2.25)$$

Pour une puissance  $P_{in} = 20W$ , une efficacité quantique  $\eta = 1$ ,  $l_1 = l_2 = 1m$  et  $\lambda = 1.064 \cdot 10^{-6} m$  (longueur d'onde du laser de Virgo), l'amplitude  $h$  minimale détectable doit être supérieure à :

$$\tilde{h}_{ShotNoise} \sim 10^{-17} / \sqrt{Hz}$$

### La pression de radiation

Avec un laser suffisamment puissant, nous pourrions nous affranchir du bruit de photons. Cependant, quand la puissance augmente, l'interféromètre devient sensible à la fluctuation de la pression de radiation. Elle est provoquée par l'impact des quantas de lumière sur les miroirs qui induisent un déplacement du miroir.

Le bruit total à la sortie de l'interféromètre dû à la pression de radiation (l'effet sur la séparatrice est négligé) s'écrit :

$$\tilde{h}(f)_{radiation} = \frac{1}{M(l_1 + l_2)f^2} \sqrt{\frac{\hbar\eta P_{in}}{2\pi^3 c \lambda}} \quad (2.26)$$

Ainsi, le bruit de pression de radiation augmente avec la puissance du laser et est proportionnel à l'inverse au carré de la fréquence d'analyse.

La figure 2.2 montre la contribution de la pression de radiation et du shot noise à la courbe de sensibilité d'un interféromètre de Michelson. Nous avons une puissance limite  $P_{limite}$  pour laquelle  $\tilde{h}_{ShotNoise} = \tilde{h}(f)_{radiation}$ . En égalisant les expressions 2.25 et 2.26 nous trouvons :

$$P_{limite} = \frac{1}{\eta} M f^2 \lambda \pi c \quad (2.27)$$

Pour  $M = 30 \text{ kg}$ ,  $\eta = 1$  et  $\lambda = 1.064 \cdot 10^{-6} m$ , nous obtenons :

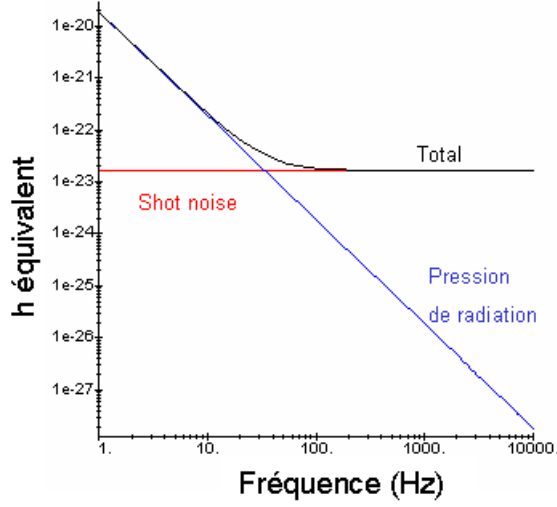
$$P_{limite} \approx 10^5 \left( \frac{f}{1 \text{ Hz}} \right)^2 W \quad (2.28)$$

La puissance limite est de 10 MW à 10 Hz, beaucoup plus élevée que celle aujourd'hui disponible. La puissance prévue dans les bras de l'interféromètre est proche de 15 kW soit 67 fois plus petite que la puissance limite à 10 Hz. Les interféromètres sont donc limités par le bruit de photons et non pas par le bruit de pression de radiation.

Si nous remplaçons la puissance limite dans les expressions 2.25 et 2.26, nous trouvons :

$$\tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{f} L} \sqrt{\frac{\hbar}{M}} \quad (2.29)$$





**FIG. 2.2:** Comparaison des densités spectrales du bruit de photons et du bruit de pression de radiation en équivalent d'amplitude d'onde gravitationnelle. Les paramètres utilisés sont :  $M = 30$  kg,  $\eta = 1$ ,  $\lambda = 1.064 \cdot 10^{-6}$  m,  $L = 100$  km,  $P = 1$  kW.

C'est la limite obtenue en appliquant le principe d'incertitude à la détermination de la position d'une masse libre. Le bruit fondamental induit par le shot noise est la limite de détection du signal gravitationnel sur la frange noire. Cependant, puisque la détection se fait en continu (2.7), nous sommes encore plus sensible à la fluctuation de puissance du laser. Pour s'en affranchir nous déplaçons la détection à plus haute fréquence (typiquement quelques MHz). La technique de modulation-démodulation synchrone permet d'arriver à ce résultat.

#### 2.1.4 La technique de modulation synchrone

La technique de modulation synchrone consiste à placer un élément électro-optique (cellule de Pockels) modulant en phase un faisceau incident et à introduire une asymétrie de longueur macroscopique des bras de l'interféromètre de Michelson appelée asymétrie de Schnupp [36].

Une tension appliquée sur une cellule de Pockels, introduit un déphasage sur le champ électromagnétique qui le traverse proportionnel à la tension appliquée.

Ainsi, le champ électromagnétique incident  $\psi_{in}(t) = A_{in} e^{i\omega_{in}t}$  est transformé en champ modulé  $\psi_{mod}(t)$  donné par :

$$\psi_{mod}(t) = A_{in} e^{i[\omega_{in}t + m \sin(\Omega t)]} \quad (2.30)$$

$$= A_{in} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) e^{i(\omega_{in} + n\Omega)t} \quad (2.31)$$

où les  $J_n$  sont les fonctions de Bessel,  $\Omega$  la pulsation de la modulation et  $m$  la profondeur de modulation. Nous avons la création d'une porteuse à la fréquence  $\omega_{in}$  et de bandes latérales aux fréquences  $\omega_{in} \pm \Omega$ .

Les trois premiers termes de la somme s'écrivent :

$$\psi_{mod}(t) = A_{in} [J_0(m) + J_1(m) e^{i\Omega t} - J_1(m) e^{-i\Omega t}] e^{i\omega_{in} t} \quad (2.32)$$

La puissance détectée en sortie de l'interféromètre  $P_D$  devient :

$$P_D = \frac{P_{in}}{2} (1 + C \cos[\phi + m \sin(\Omega t)]) \quad (2.33)$$

En développant cette expression autour de la position correspondant à une interférence destructive et en supposant  $m \ll 1$  alors la puissance en sortie de l'interféromètre est donnée par l'expression :

$$P \simeq \frac{P_{in}}{2} [1 - C J_0(m) + C \delta\phi J_1(m) \sin(\Omega t)] \quad (2.34)$$

L'équation 2.34 montre que tant que l'interféromètre est sur la frange noire, le signal à la fréquence de modulation  $\Omega$  est proportionnel au déphasage entre les deux faisceaux et donc à l'onde gravitationnelle.

Faire de la démodulation permet d'extraire la partie à la fréquence  $\Omega$  du signal de frange noire et s'écrit par analogie avec l'équation 2.19 :

$$\delta P_{Dog} = C \frac{P_{in}}{2} J_1(m) \delta\phi \quad (2.35)$$

Concernant le shot noise, seule la partie à la fréquence  $\Omega$  de la relation 2.34 nous intéresse et nous obtenons :

$$\delta P_{ShotNoise} = \sqrt{\frac{P_{in}}{2} \frac{\hbar\omega}{\eta\Delta t}} \sqrt{1 - C J_0(m)} \quad (2.36)$$

Une variation de phase est détectable uniquement si la condition ( $\delta P_{Dog} > \delta P_{ShotNoise}$ ) est remplie, ce qui nous donne une limite inférieure sur la plus petite phase détectable :

$$\delta\phi_{minimale} > \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{P_{in}\eta\Delta t} \frac{\sqrt{1 - C J_0(m)}}{C J_1(m)}} \quad (2.37)$$

Le maximum de la relation 2.37 est obtenu en minimisant la valeur  $1 - C J_0(m)$ .

Dans le cas idéal où le contraste de l'interféromètre est parfait ( $C = 1$ ) et la profondeur de modulation tend vers 0 (soit  $J_0(m) \sim 1$  et  $J_1(m) \sim m/2$ ), la limite donnée par l'équation 2.37 est :

$$\delta\phi_{minimale} > \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{P_{in}\eta\Delta t}} \quad (2.38)$$

Nous retrouvons la même limite que celle obtenue par la détection en continu. Cependant, la modulation de phase du faisceau incident permet de déplacer la mesure à des fréquences où les fluctuations en puissance et le bruit de fréquence du laser sont moindres. À ces fréquences le bruit de l'électronique ( $\propto \frac{1}{f^2}$ ) est également plus faible. Dans ce cas nous optimisons le rapport signal sur bruit de l'interféromètre.

### 2.1.5 Améliorations du principe initial

La limite de détectabilité de l'onde gravitationnelle dépend essentiellement de deux paramètres : la puissance de la source laser  $P_{in}$  et la longueur des bras  $l_1$  et  $l_2$  de l'interféromètre de Michelson.

Cette limitation est traitée de deux manières complémentaires :

- nous intercallons un miroir entre la séparatrice et les miroirs de fond de chacun des bras de l'interféromètre de Michelson qui ont une longueur de plusieurs km. Cette modification forme deux nouvelles cavités optiques nommées cavités Fabry-Perot (voir Annexe A) ;
- nous plaçons un miroir entre la séparatrice et la source laser. Cela a pour effet de créer une autre cavité Fabry-Perot et engendre une augmentation de la puissance arrivant sur la séparatrice grâce aux propriétés optiques des cavités Fabry-Perot.

#### Augmenter la longueur du parcours de la lumière

Les cavités Fabry-Perot sous-couplées (voir Annexe A) ont comme particularité à la résonance d'amplifier la longueur optique parcourue par la lumière :

$$L_{\text{optique}} = L_{\text{bras}} \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$

Dans le cas de Virgo (finesse ( $\mathcal{F}$ ) des cavités Fabry-Perot des bras proche de 50), la lumière parcourt en moyenne un trajet de près de 100 km. La réponse de la cavité Fabry-Perot à un signal d'onde gravitationnelle est donnée par la fonction de transfert suivante :

$$\left| \frac{\delta\phi}{h} \right| \sim \frac{8\pi}{\lambda} L_{\text{optique}} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{f_{\text{signal}}}{f_{FP}} \right)^2}} \quad (2.39)$$

où  $f_{FP} = \frac{c}{4L\mathcal{F}}$  est le pôle de la cavité Fabry-Perot.

D'après l'équation 2.39, une cavité Fabry-Perot s'apparente à un filtre passe-bas du premier ordre avec une fréquence de coupure  $f_{FP} = \frac{c}{4L\mathcal{F}}$  (voir Annexe A).

Dans le cas de Virgo, la fréquence de coupure est proche de 500 Hz et le temps de stockage dans les cavités Fabry-Perot est de 0.16 ms ( $\tau_{FP} = \frac{1}{f_{FP}} \frac{1}{4\pi}$ ). La sensibilité de l'interféromètre diminue donc pour des fréquences supérieures à 500 Hz.

#### Augmenter la puissance de la lumière sur la séparatrice

Lorsque l'interféromètre de Michelson est sur la frange noire, il est équivalent à un miroir de réflectivité unité. Donc, la lumière qui arrive vers la séparatrice est réfléchi et revient vers la source. Selon la relation 2.25, la sensibilité de l'instrument varie inversement à la racine carrée de la puissance arrivant sur la séparatrice ( $\propto \frac{1}{\sqrt{P_{in}}}$ ). Augmenter la puissance arrivant sur la séparatrice rend le détecteur plus sensible à l'onde gravitationnelle. Une cavité Fabry-Perot à la résonance a comme caractéristique en plus d'augmenter le chemin optique, d'accroître la puissance intra-cavité d'un facteur déterminé par les caractéristiques optiques de la cavité (voir Annexe A).

À partir de là, ajouter un miroir entre la source laser et la séparatrice permet de créer une nouvelle cavité Fabry-Perot appelée cavité de recyclage. Malgré la perte de lumière engendré par l'installation de ce miroir, nous profitons de l'effet de gain de puissance (gain de recyclage) apporté par la nouvelle cavité lorsqu'elle est à la résonance. Ce facteur d'amplification est donné pour un interféromètre idéal par la relation :

$$G_{rec} = \left( \frac{t_{PR}}{1 - r_{PR} r_{MICH}} \right)^2 \quad (2.40)$$

où  $r_{PR}$  et  $t_{PR}$  sont respectivement la réflectivité et la transmittivité en amplitude du miroir de recyclage et  $r_{MICH}$  est la réflectivité en amplitude du miroir équivalent à l'interféromètre de Michelson.

En pratique, le gain de recyclage  $G_{rec}$  est limité par les pertes de l'interféromètre (absorption des miroirs, lumière diffusée ...)[37]. En supposant que les pertes de l'interféromètre ne dépasseront pas  $p_{total} \sim 2\%$ , nous avons :

$$G_{rec} \approx \frac{1}{p_{total}} \sim 50 \quad (2.41)$$

Par ces différentes améliorations et en considérant le pôle de la cavité Fabry-Perot, la relation 2.25 se réécrit :

$$\tilde{h}_{ShotNoise} = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{1}{\frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{l_1 + l_2}{2}} \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\eta G_{rec} P_{in}}} \sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_{FP}} \right)^2} / \sqrt{Hz} \quad (2.42)$$

En considérant une puissance incidente de 20 W, la sensibilité de Virgo est approximée par la relation suivante :

$$\tilde{h}_{ShotNoise} \simeq 3 \cdot 10^{-23} \sqrt{1 + \left( \frac{f}{500} \right)^2} / \sqrt{Hz} \quad (2.43)$$

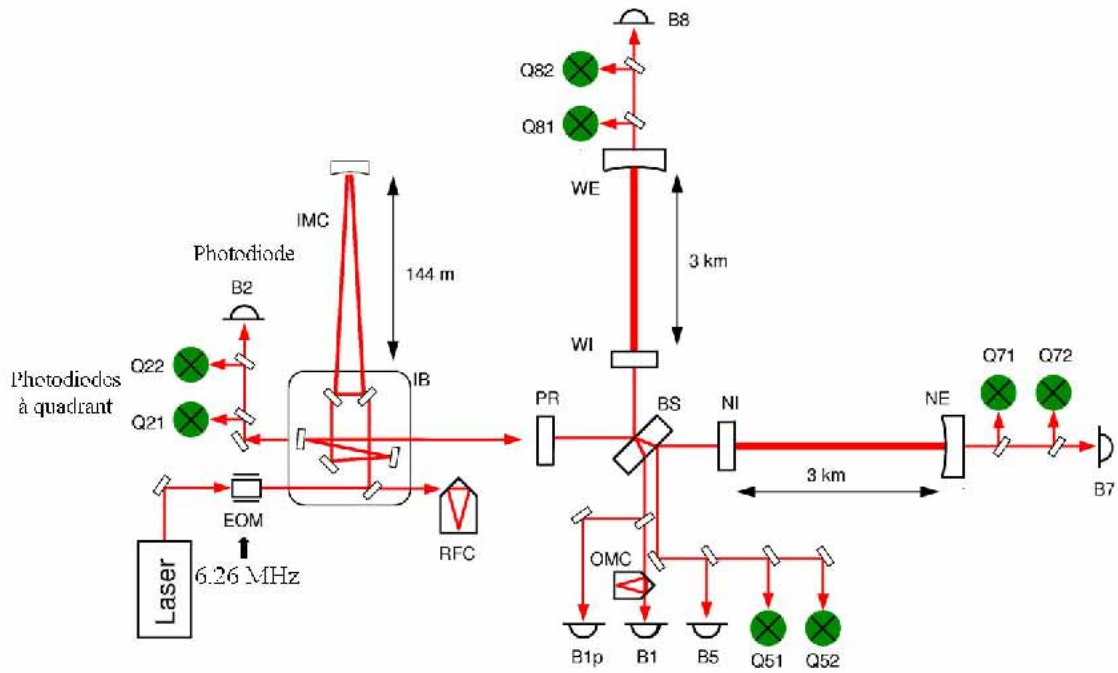
## 2.2 Le détecteur Virgo et ses caractéristiques

Le détecteur Virgo est un projet Franco-Italien dont le but est la détection directe des ondes gravitationnelles [19]. L'interféromètre Virgo a été construit près de Pise en Italie dans la plaine de l'Arno. La sensibilité souhaitée impose d'employer des bras longs de 3 kilomètres appelés bras Nord et bras Ouest.

L'ensemble du détecteur a été conçu avec l'objectif initial d'obtenir une sensibilité optimale en  $h$  atteignant quelques  $10^{-23} / \sqrt{Hz}$  autour de 300 Hz et inférieure à  $10^{-21} / \sqrt{Hz}$  entre 20 Hz et 10 kHz. Une vue synthétique du détecteur Virgo est donnée sur la figure 2.3. Nous allons dans les parties qui suivent en décrire les différentes parties.

### 2.2.1 Le module laser

Le système laser est conçu pour produire et adapter le faisceau à l'interféromètre. Il consiste en deux sources laser, un banc d'injection et un "mode cleaner" permettant de délivrer un faisceau nettoyé et ne comportant que le mode fondamental du laser TEM<sub>00</sub> (voir Annexe A). Il doit respecter les spécifications établies pour la puissance délivrée en sortie du mode cleaner, pour la fluctuation en fréquence et en puissance du laser et enfin pour les fluctuations de pointé du faisceau laser ("jitter").



**FIG. 2.3:** Vue synthétique de l'interféromètre Virgo, avec les systèmes de détection associés à chaque faisceau ainsi que des différentes optiques qui permettent d'obtenir un faisceau de qualité optimale.

## Le module laser

Le laser est un Nd:YAG de puissance nominale de 20 W pour le mode fondamental dont la longueur d'onde est de  $1.064 \mu\text{m}$ . Le laser est la combinaison d'un laser maître de faible puissance ( $P = 1 \text{ Watt}$ ) qui donne une référence en fréquence à un laser esclave. Le faisceau issu du laser esclave est utilisé dans l'interféromètre.

## Le banc d'injection

Le banc d'injection est placé dans le vide et est suspendu à un super atténuateur (voir page 46) ce qui permet de l'isoler sismiquement. Il est composé de trois éléments principaux :

- les miroirs d'entrée et de sortie du mode cleaner.
- le télescope qui permet d'adapter le faisceau provenant du mode cleaner vers l'interféromètre.
- la cavité de pré-stabilisation en fréquence du laser attachée de manière rigide au banc.

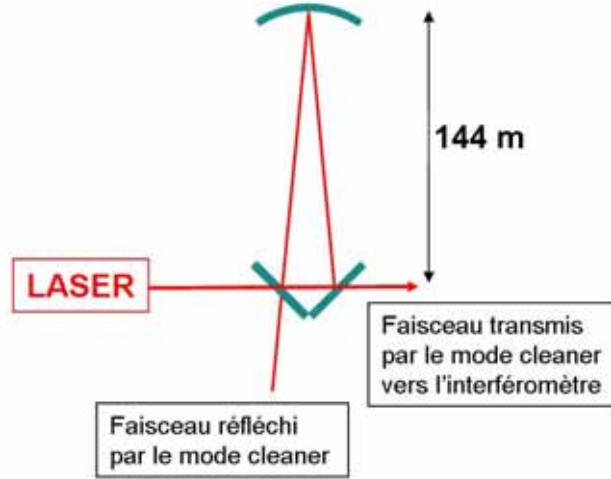


FIG. 2.4: Vue schématique du mode cleaner de Virgo.

### Le mode cleaner

Le mode cleaner est le dispositif permettant de filtrer et de contrôler le faisceau d'entrée qui doit être un faisceau où seul le mode  $TEM_{00}$  est présent.

Le mode cleaner est une cavité triangulaire. Il est constitué de trois miroirs. Deux miroirs plans sont situés sur le banc d'injection et le troisième miroir concave est suspendu à un super atténuateur situé à 144 m.

Cette cavité optique est équivalente à une cavité Fabry-Perot de finesse  $\mathcal{F} = 1000$ . Elle est maintenue à la résonance sur le mode  $TEM_{00}$  du laser. Elle permet ainsi d'éliminer les défauts géométriques du faisceau en filtrant tous les modes d'ordres supérieurs générés par les bruits en position et en angle du laser. L'utilisation d'une cavité triangulaire permet au faisceau réfléchi (voir figure 2.4) composé des modes d'ordre supérieur n'entrant pas dans le mode cleaner de ne pas polluer le faisceau provenant du laser.

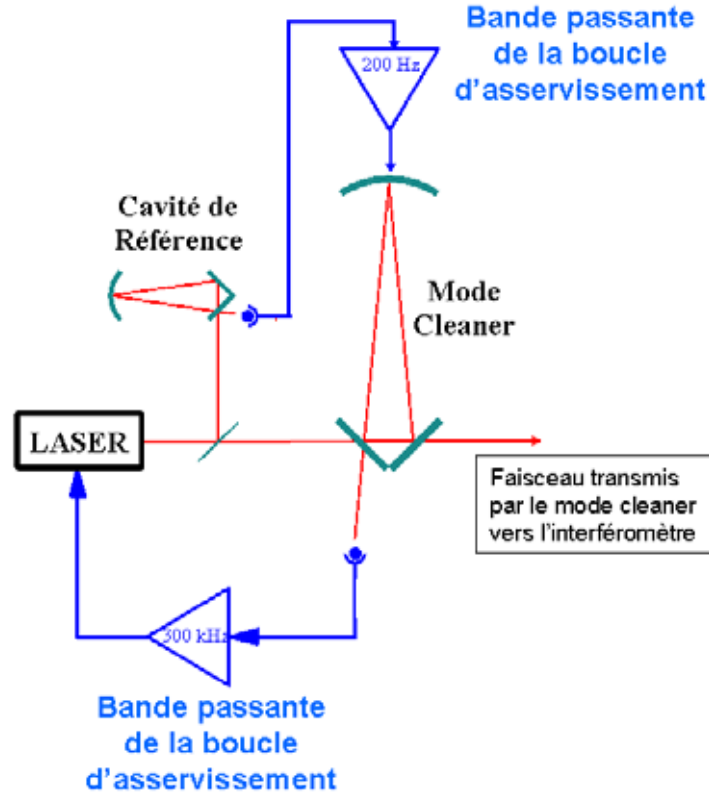
### Spécifications de la source laser

La présence d'asymétrie dans les deux bras, en longueur  $\Delta L$  et en finesse  $\Delta \mathcal{F}$ , rend la frange noire sensible au bruit de fréquence  $\delta \tilde{\nu}$  du laser. La densité spectrale du bruit de fréquence peut être approximée par :

$$\tilde{h}_{\delta\nu} = \frac{\delta \tilde{\nu}}{\nu} \left( \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \right) \quad (2.44)$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse moyenne des cavités Fabry-Perot des bras,  $L$  la longueur moyenne des bras et  $\nu$  la fréquence du laser. Pour prévenir toute introduction de bruit au dessus de  $\tilde{h}_{ShotNoise}$ , le laser doit satisfaire la condition :

$$\frac{\delta \tilde{\nu}}{\nu} < \frac{\tilde{h}_{ShotNoise}}{\left( \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \mathcal{F}}{\mathcal{F}} \right)} \quad (2.45)$$



**FIG. 2.5:** Premier niveau de la stratégie de contrôle de la fluctuation en fréquence du laser. Nous voyons que le contrôle est composé de deux parties. Une première partie utilise le signal d'erreur produit par la cavité de référence pour agir sur la longueur de la cavité mode cleaner et l'autre utilise le signal d'erreur produit par le mode cleaner pour asservir le laser.

pour une asymétrie de 1%, les conditions à satisfaire sont :

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\nu} &\leq 10^{-4} \left[ \text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \right] \text{ à } 10 \text{ Hz} \\ \delta\tilde{\nu} &\leq 10^{-6} \left[ \text{Hz}/\sqrt{\text{Hz}} \right] \text{ à } 500 \text{ Hz}\end{aligned}$$

Pour répondre aux spécifications de la fluctuation en fréquence du laser, différents niveaux de contrôle sont nécessaires.

Tout d'abord, nous contrôlons la longueur du mode cleaner d'entrée ( $\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\delta L}{L}$ ) (voir figure 2.5). Ce contrôle se compose de deux parties : une cavité de petite taille (cavité de référence), rigide et de grande finesse ( $\mathcal{F} \sim 30000$ ) permet de produire un signal d'erreur utilisé pour corriger la longueur du mode cleaner sur une bande passante de 200 Hz. À plus haute fréquence, le signal réfléchi par le mode cleaner est utilisé pour corriger directement la fréquence du laser. La bande passante de cette boucle d'asservissement est de 300 kHz (voir figure 2.5).

Les niveaux suivants de la stabilisation de fréquence du laser utilisent l'interféromètre comme référence. Nous rentrerons dans les détails de cette boucle d'asservissement dans la partie consacrée au contrôle longitudinal des cavités optiques de Virgo.

Pour résumer, lorsque l'interféromètre est à son point de fonctionnement, le laser est asservi à haute fréquence (au delà de quelques Hz) sur le chemin optique total parcouru par la lumière dans les cavités Fabry-Perot de Virgo ( $\sim 100$  km). Les spécifications sur la fluctuation en fréquence du laser sont ainsi satisfaites.

### 2.2.2 Le banc de détection

Le système de détection de Virgo est composé de deux éléments : un banc suspendu pour atténuer le bruit sismique et un banc de détection placé en dehors des enceintes à vide.

Sur le banc suspendu, nous trouvons un dispositif optique conçu pour assurer différentes fonctions :

- séparer le signal de frange noire et le signal issu de la réflexion sur la seconde face de la séparatrice ;
- adapter la taille du faisceau par différents éléments optiques (téléscope...) au mode cleaner de sortie et aux photodiodes ;
- filtrer spatialement le signal de frange noire pour améliorer le contraste. En effet, les asymétries dans l'interféromètre engendrent la présence de modes d'ordres supérieurs dans le faisceau. Le mode cleaner de sortie dont le rôle est équivalent au mode cleaner d'entrée, permet de transmettre le mode fondamental  $TEM_{00}$ .  
C'est une cavité optique triangulaire monolithique qui a une longueur de 2.5 cm et une finesse de 50. Il est maintenu à la résonance par un contrôle thermique. Le défaut de contraste espéré après filtrage est  $1 - C \sim 10^{-4}$ . Nous gagnons un ordre de grandeur sur le défaut de contraste grâce à l'utilisation de ce mode cleaner.

L'objectif du banc de détection est de mesurer le signal sur la frange noire et il se compose des éléments suivants :

- un banc optique externe où tout le système de détection est placé. Puisque, la puissance du faisceau de frange noire est d'environ 1 Watt (valeur au delà de la capacité de résistance d'une photodiode), nous le distribuons sur un réseau de 16 photodiodes qui ont les caractéristiques suivantes :
  - une bande passante supérieure à une dizaine de MHz car la fréquence de modulation est de quelques MHz ;
  - une grande efficacité quantique  $\eta$ . Pour les photodiodes InGaAs utilisées  $\eta = 90\%$  dans l'infrarouge ( $1.064 \mu\text{m}$ ) ;
- un système d'amplification, de filtrage, de démodulation et d'échantillonnage des signaux venant des photodiodes.



### 2.2.3 Le système du vide

Toute fluctuation de densité du gaz que traverse le faisceau laser induit une fluctuation de l'indice de réfraction. Ceci entraîne un bruit de phase de l'onde électromagnétique. Pour limiter ce bruit, l'interféromètre est placé dans des tubes où règne un ultra-vide grâce à des pompes à vide réparties sur chacun des deux bras.

La pression résiduelle des différents gaz doit être très faible :

- $10^{-9}$  mbar pour l'hydrogène : principal responsable de la fluctuation de l'indice du vide car très difficile à évacuer ;
- $10^{-14}$  mbar pour les hydrocarbures : responsables majeurs de la pollution des miroirs ;
- $10^{-10}$  mbar pour les autres gaz.

Le système du vide se compose de deux parties : les tubes et les tours.

Les tubes sont composés de sections cylindrique de 120 cm de diamètre et 15 m de long, connectés les uns aux autres par des soufflets. Cette disposition permet au matériau employé de se dilater sous l'effet de la température sans compromettre l'architecture des tubes. Dans les tubes, des pièges à lumière qui ont la forme de cône tronqué et des déflecteurs sont installés (80 par bras). En effet, toute imperfection ou pollution sur les miroirs peut diffuser de la lumière. Cette lumière est alors réfléchi par les parois internes du tube. Si un de ces photons réfléchis se recombine avec le faisceau principal, un bruit de phase est introduit. L'utilisation de piège à lumière est indispensable pour absorber ces photons indésirables.

Les tours abritent les super atténuateurs (voir page 46) et la pression qui y règne est supérieure à celle des tubes ( $10^{-6}$  mbar) car de nombreux systèmes électroniques sont présents.

Différentes vannes permettent de confiner les différentes parties de l'interféromètre. Par exemple, une vanne sépare la partie ultra-vide des tubes de celle où les miroirs sont suspendus.

### 2.2.4 Les suspensions

Pour pouvoir mesurer le passage d'une onde gravitationnelle par interférométrie les miroirs doivent pouvoir être considérés comme des masses libres. Pour cela, il est nécessaire de les suspendre comme nous l'explique la suite.

#### Les miroirs considérés comme des masses libres

Considérons le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}$$

projetons cette relation sur l'axe Ox, alors nous avons :

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

en utilisant la transformée de Laplace<sup>1</sup>, cette relation se réécrit en considérant des conditions initiales nulles :

$$F(s) = m s^2 x(s)$$

Alors, la fonction de transfert du système est :

$$H(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2} \quad (2.46)$$

Par conséquent, une masse libre à un comportement proportionnel à  $\frac{1}{s^2}$ .

Nous allons dans la suite expliciter comment techniquement nous pouvons faire pour considérer un corps en interaction avec une onde gravitationnelle comme une masse libre. Pour cela, analysons le comportement du pendule simple.

#### Le pendule simple

D'après la figure 2.6, nous pouvons définir différentes variables :  $x(t)$  indique la position de la masse,  $x_0(t)$  celle du point d'attache du pendule,  $m$  sa masse,  $l$  la longueur du fil,  $T$  la tension exercée par le fil,  $P$  le poids de la masse suspendue au pendule et  $F(t)$  représente tout type de force agissant sur la masse selon l'axe Ox.

Dans l'approximation des petits angles et sans dissipation d'énergie, l'équation du mouvement s'écrit :

$$F(t) - m \omega_0^2 [x(t) - x_0(t)] = m \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.47)$$

avec  $\omega_0^2 = g/l$ , la fréquence propre du pendule.

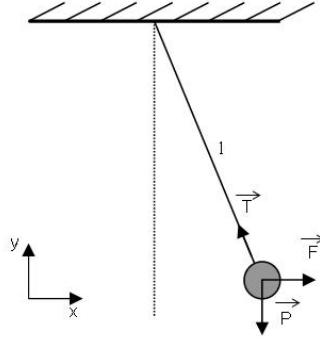
En utilisant la transformation de Laplace, l'équation du mouvement devient :

$$x(s) = \frac{F(s)/m + \omega_0^2 x_0(s)}{s^2 + \omega_0^2} \quad (2.48)$$

---

<sup>1</sup>Définie par  $F(s) \equiv \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$  et  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \equiv \frac{1}{i2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds$  où  $f(t)$  est une fonction arbitraire du temps et  $s \equiv \sigma + i\omega$

---



**FIG. 2.6:** Représentation d'un pendule simple avec les différentes forces auxquelles il est soumis.

Si nous considérons le point d'attache immobile ( $x_0(s) = 0$ ), la fonction de transfert  $H_{pendule}(s)$  reliant la position  $x(s)$  à la force  $F(s)$  est :

$$H_{pendule}(s) = \frac{x(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + \omega_0^2} \quad (2.49)$$

et pour  $s \gg \omega_0$  nous avons :

$$H_{pendule}(s) = \frac{1/m}{s^2} \quad (2.50)$$

Ainsi, au-dessus de la fréquence propre du pendule, le mouvement de la masse a un comportement proportionnel à  $\frac{1}{s^2}$  comparable au comportement d'un corps en chute libre (équation 2.46).

Par conséquent, pour pouvoir considérer les corps en interaction avec l'onde gravitationnelle comme des masses libres, ceux-ci sont suspendus à des pendules. Le fait de suspendre les miroirs permet également de limiter l'impact du bruit sismique sur le mouvement des miroirs.

### Le super atténuateur

Le bruit le plus gênant à basse fréquence est le bruit lié aux activités sismiques et humaines. Le système de suspension des miroirs de Virgo a été conçu pour isoler au mieux les miroirs des perturbations extérieures.

Le rôle du super atténuateur [40] illustré par la figure 2.7 est de réduire le plus possible les mouvements des miroirs au dessus de 1 Hz (voir figure 2.8).

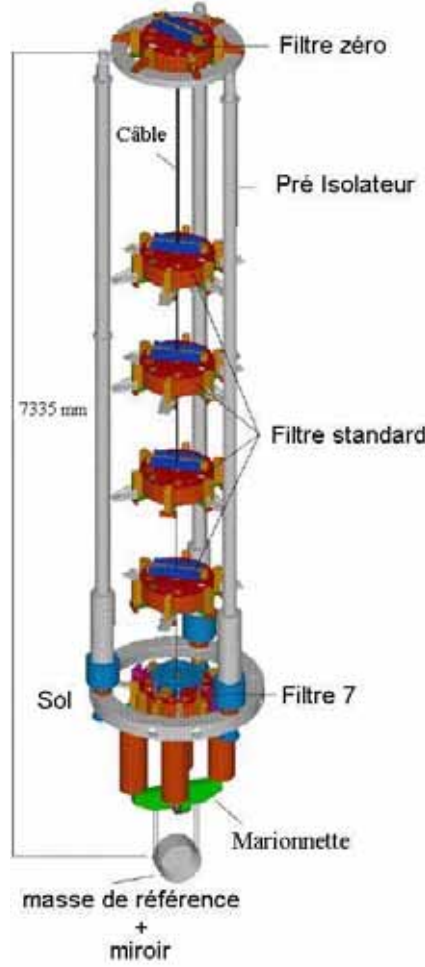
Le dispositif d'atténuation des mouvements horizontaux repose sur les propriétés de filtrage passe-bas du second ordre d'un pendule simple.

À cause de couplages mécaniques dus à la courbure de la Terre<sup>2</sup>, une fraction des mouvements verticaux du système – sur lesquels les pendules sont sans effet – est transmise horizontalement. Pour les atténuer, des ressorts à lames sont ajoutés.

---

<sup>2</sup>L'angle de couplage est égal au rapport de la longueur d'un bras (3 km) sur le diamètre terrestre et vaut donc  $\theta_{\text{vert/hor}} \approx 2.35 \cdot 10^{-4}$  radians.

---



**FIG. 2.7:** Schéma d'un super atténuateur de Virgo. Nous reconnaissons le pendule inversé et le "filtre 0" (la pré isolation), la chaîne de cinq pendules, le "filtre 7" et la marionnette, enfin la masse de référence et le miroir.

Schématiquement, un super atténuateur peut être divisé en quatre parties.

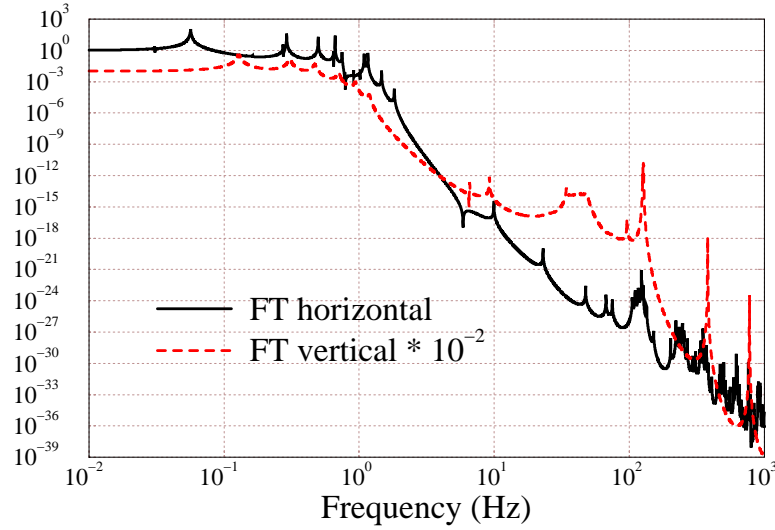
- L'étage de pré isolation.

La chaîne de pendules est à l'intérieur d'un pendule inversé, de longueur  $l \sim 6$  mètres et de constante de raideur  $k \sim 1500$  N/m. Grâce à la compétition entre la force de gravité qui tend à l'éloigner de sa position d'équilibre et la force de rappel élastique, sa fréquence de résonance  $f_{\text{res}}$  peut être rendue très petite [42] :

$$f_{\text{res}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} \approx 30 \text{ mHz pour Virgo.} \quad (2.51)$$

La force nécessaire pour faire bouger le sommet du pendule de  $\delta l = 1$  cm vaut seulement  $F = m (2\pi f_{\text{res}})^2 \delta l \approx 0.36$  N.

Au niveau du "filtre 0" est placé un dispositif de contrôle local, le Damping Inertiel [43]. Son objectif est de diminuer l'amplitude des mouvements et des vitesses des miroirs à basse fréquence.



**FIG. 2.8:** Fonctions de transfert horizontale et verticale simulées du super atténuateur.

Pour cela, des accéléromètres évaluent les variations de vitesse du pendule inversé tandis que des LVDT<sup>3</sup> mesurent son mouvement relatif par rapport à un repère externe et empêchent ses dérives à vitesse constante auxquelles les senseurs inertiels ne sont pas sensibles. Cependant ce système a un contre-coup car il réinjecte une fraction du bruit sismique à basse fréquence.

- Les cinq filtres.

Chacun des filtres (voir figure 2.7) est un cylindre d'acier d'une centaine de kg qui supporte des lames élastiques en forme de triangle. Aucune résonance de la chaîne complète d'atténuation ne dépasse 7.5 Hz ce qui reste en deçà de la bande de détection de Virgo (de 10 Hz à 10 kHz).

- Le “filtre 7” et la marionnette.

Le dernier étage du super atténuateur est appelé “filtre 7” ; en dessous se trouve la marionnette, utilisée pour le contrôle des miroirs dans trois degrés de libertés :  $z$  (mouvement longitudinal selon l'axe du faisceau),  $\theta_x$  (“pitch”, rotation autour de la direction horizontale perpendiculaire à  $z$ ) et  $\theta_y$  (“yaw”, rotation autour de l'axe du pendule). Le pilotage est effectué à l'aide de 4 bobines montées sur le filtre 7 et donc isolées sismiquement agissant sur des aimants fixés sur la marionnette.

- La masse de référence et le miroir.

À la marionnette, est suspendu un couple miroir et masse de référence. La masse de référence a un poids égal à celle du miroir. Quatre aimants sont montés sur le miroir. Sur la masse de référence, quatre bobines leur correspondent. Lorsque les bobines agissent sur le miroir pour le contrôle longitudinale de la cavité optique (Locking), la masse de référence a un mouvement opposé ce qui permet de garder le centre de gravité de l'ensemble immobile. Ainsi, la chaîne verticale ne bouge pas.

<sup>3</sup>Linear Variable Differential Transformers.

La figure 2.8 présente les performances simulées d'un super atténuateur de Virgo. La différence de deux ordres de grandeur entre les fonctions de transfert vertical et horizontal qui masque l'effet de couplage dû à la courbure de la terre s'explique par le fait que la marionnette ne filtre que les mouvements horizontaux. Entre 1 et 10 Hz, l'atténuation varie en  $1/f^{12}$  pour les mouvements verticaux et  $1/f^{14}$  pour les mouvements horizontaux.

Avec un super atténuateur passif le déplacement longitudinale et angulaire est respectivement de l'ordre de la centaine de  $\mu\text{m}$  et de  $\mu\text{rad}$ . Par l'utilisation des contrôles locaux (voir page 68) nous réduisons ces deux paramètres à quelques  $\mu\text{m}$  et  $\mu\text{rad}$ .

## 2.3 Les miroirs

Les 6 miroirs de l'interféromètre ont été fabriqués par le LMA<sup>4</sup> de Lyon. Ce sont des cylindres de silice de diamètre compris entre 12 et 35 cm (miroir des cavités Fabry-Perot) et de masse comprise entre 5 et 30 kg.

Ils ont été conçus à la fois pour minimiser les pertes de l'interféromètre (par transmission, absorption ou diffusion) mais aussi pour éviter leur échauffement et leur déformation. Les pertes sont inférieures à 10 par million (10 ppm). Le front d'onde est défini à 25 nm RMS. La grande qualité des miroirs permet ainsi de maximiser le contraste de l'interféromètre et d'éviter les déformations du front d'onde.

Pour ce qui est des composants optiques, toutes les spécifications sont tirées de la référence [19]. Nous allons dans ce qui suit comparer les mesures des caractéristiques des miroirs faites au LMA de Lyon à celles effectuées après installation des miroirs sur le site.

### Les paramètres des cavités Fabry-Perot

#### *La finesse*

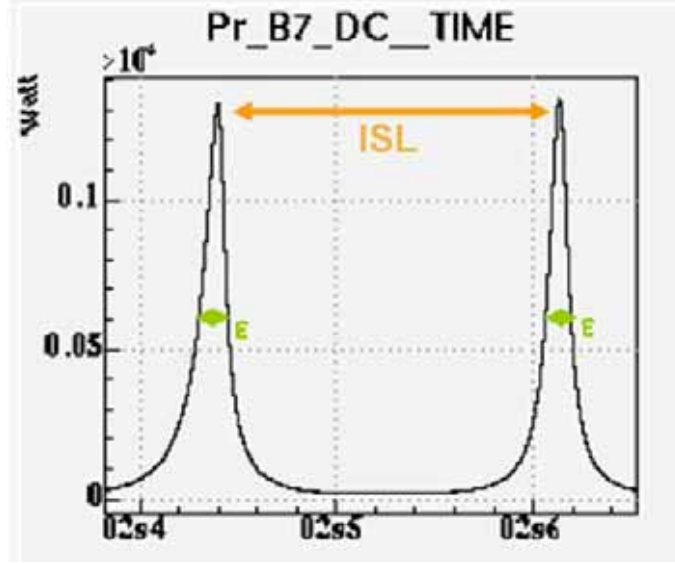
La finesse d'une cavité Fabry-Perot est définie par le rapport  $\mathcal{F} = \frac{ISL}{\epsilon}$  (voir figure 2.9 et Annexe A). Cette mesure peut être effectuée en laissant la cavité libre. Cependant, dû à des problèmes de dynamique, le pic d'Airy peut être déformé à cause de la vitesse, cet effet s'accroissant avec la vitesse. Il est donc nécessaire de mesurer la vitesse de la cavité pour que la finesse puisse être estimée.

Deux méthodes ont été utilisées et sont basées sur le même principe :

- mesurer la vitesse de la cavité ;
- reproduire en simulation la forme du pic d'Airy pour une vitesse spécifique et pour différentes valeurs de finesse. Puis par ajustement des données, nous déterminons la finesse.

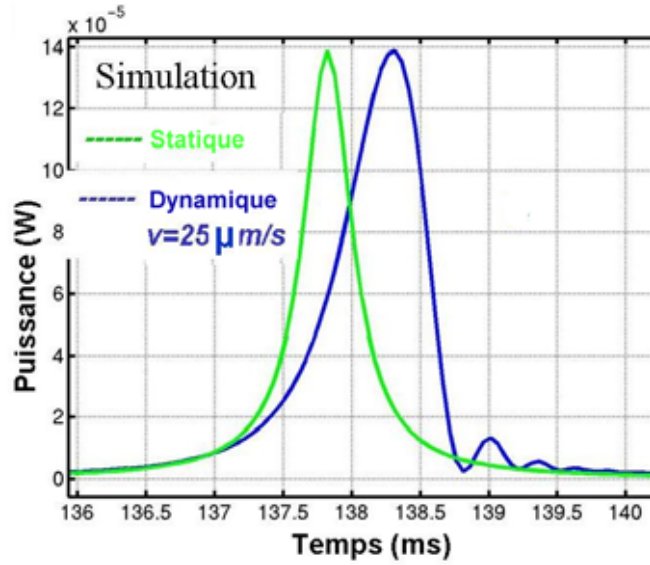
---

<sup>4</sup>Laboratoire des Matériaux Avancés.



**FIG. 2.9:** Mesure de la puissance en sortie du bras Nord. Les paramètres nécessaires à l'estimation de la finesse sont aussi indiqués.

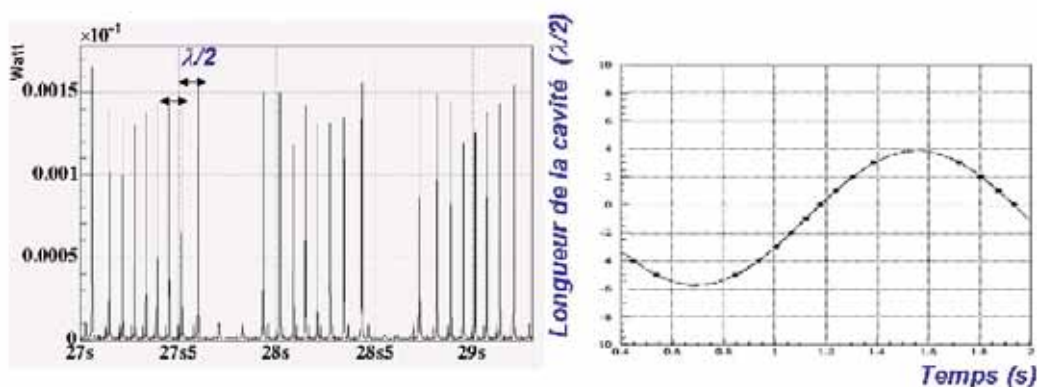
*Méthode avec une vitesse de cavité rapide*



**FIG. 2.10:** Effet dynamique introduit par une vitesse de la cavité Fabry-Perot pour laquelle le temps de passage de la résonance est plus faible que le temps de stockage de la lumière dans la cavité.

Dans le cas d'une cavité qui se déplace rapidement (typiquement au delà de  $20 \mu\text{m/s}$ ), nous nous trouvons dans le régime transitoire et le pic d'Airy est suivi de rebonds comme l'illustre la figure 2.10.

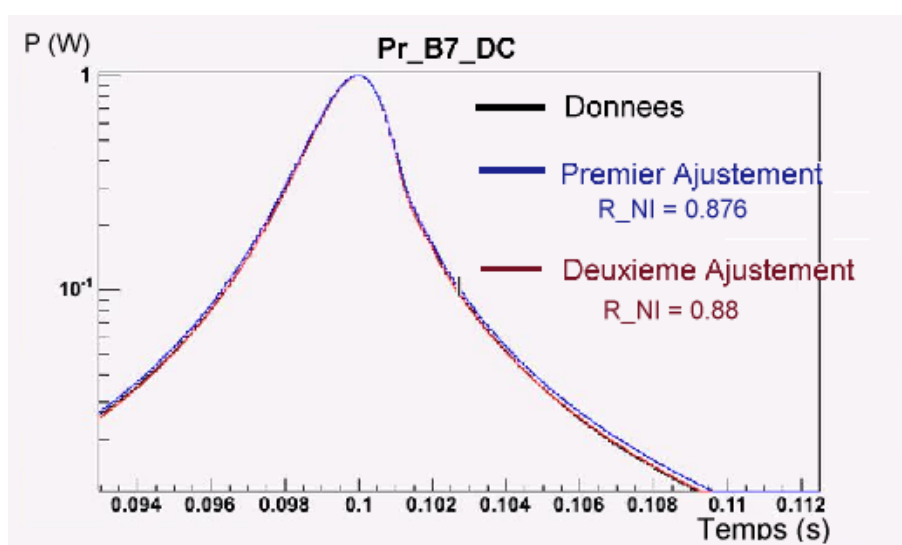
L'amplitude et la position de ces pics secondaires dépendent respectivement de la finesse et de la vitesse [84]. Nous déterminons d'abord la vitesse et ensuite la finesse en comparant les données à une simulation SIESTA (voir page 83).



**FIG. 2.11:** Mesure de la vitesse de la cavité Fabry-Perot à partir de l'évolution de la position des pics d'Airy.

### Méthode avec une vitesse de cavité faible

Quand la vitesse de la cavité Fabry-Perot est plus faible, le régime transitoire n'apparaît pas. La vitesse peut être déterminé par la position de la résonance du mode  $TEM_{00}$  de la porteuse dans le temps : entre chaque résonance, la cavité a parcouru une longueur de  $\frac{\lambda}{2}$  (voir figure 2.11). Si la cavité Fabry-Perot n'est pas trop excitée (angulairement et longitudinalement), la longueur de la cavité peut être ajusté par une fonction cosinus sur une demi période avec une bonne approximation. La figure 2.11 montre la longueur de la cavité Fabry-Perot Nord en fonction du temps, ajustée par une fonction du type  $l(t) = l_0 \cos(\omega t + \phi)$ . La vitesse de la cavité est déterminé à plus ou moins 2 % près.



**FIG. 2.12:** Ajustement de la puissance en sortie de la cavité Nord à partir de la modification de la réflectivité des miroirs d'entrée des cavités Fabry-Perot.



La forme et l'amplitude du pic d'Airy est comparée à des simulations pour différentes valeurs de la finesse. Pour cela, nous modifions uniquement la réflectivité des miroirs d'entrée des bras. Les valeurs utilisées pour la réflectivité des miroirs de fond sont celles mesurées au LMA de Lyon (voir figure 2.12). Cette méthode a été appliquée pour chaque cavité Fabry-Perot sur dix points. La dispersion des mesures définit la précision sur la finesse. La table 2.1 fait le bilan de ces deux méthodes.

	Méthode : Cavité avec une vitesse faible	Méthode : Cavité avec une grande vitesse
$r_{NI}^2$	$0.88 \pm 0.005$	$0.875 \pm 0.005$
$r_{WI}^2$	$0.884 \pm 0.005$	Pas évalué
Finesse bras Nord	$49 \pm 0.5$	$47 \pm 0.8$
Finesse bras Ouest	$51 \pm 1$	Pas évalué

**TAB. 2.1:** Mesures des réflectivités des miroirs d'entrée et de la finesse des cavités Fabry-Perot des bras ainsi que de leur finesse.

Les tables 2.2 et 2.3 résument les mesures faite au LMA de Lyon et les spécifications des miroirs d'entrée des bras. Les valeurs mesurées sont en bon accord avec celles évaluées au LMA de Lyon  $r_{NI}^2 = 0.882$  et  $r_{WI}^2 = 0.883$ .

	Spécifications pour Virgo	Mesures faites au LMA de Lyon
Diamètre (mm)	$350 \pm 0.5$	$350 \pm 0.5$
Epaisseur (mm)	$96 \pm 0.5$	$96.8 \pm 0.2$
$r_{NI}^2$	88 %	$88.2 \pm 0.03$ %

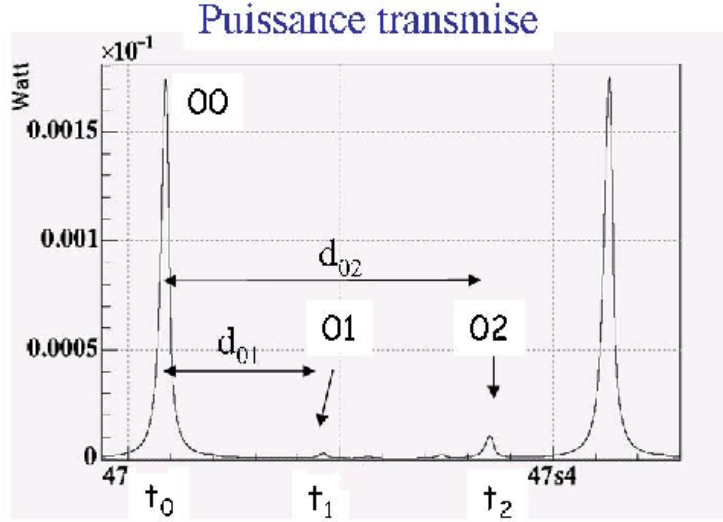
**TAB. 2.2:** Caractéristiques optiques du miroir d'entrée du bras Nord (NI)

	Spécifications pour Virgo	Mesures faites au LMA de Lyon
Diamètre (mm)	$350 \pm 0.5$	$350 \pm 0.5$
Epaisseur (mm)	$96 \pm 0.5$	$96.8 \pm 0.2$
$r_{WI}^2$	88 %	$88.14 \pm 0.02$ %

**TAB. 2.3:** Caractéristiques optiques du miroir d'entrée du bras Ouest (WI)

### *Les rayons de courbures des miroirs*

Les miroirs de fond sont courbes pour épouser la forme d'onde du faisceau laser et pour une question de stabilité (cavité plan-courbe)(voir Annexe A) de la cavité Fabry-Perot. En ce qui concerne la technique d'alignement des miroirs, il est important d'évaluer avec précision le rayon de courbure (RdC) des miroirs de fond des cavités Fabry-Perot [45].



**FIG. 2.13:** Puissance en sortie d'une cavité, où sont identifiés les différents modes d'Hermitte-Gauss.

Le principe de la mesure à partir des données consiste à extraire le RdC à partir de la distance séparant le premier et le second mode d'Hermitte-Gauss du mode  $TEM_{00}$  de la cavité (voir figure 2.13). Pour évaluer la distance  $d_{mn}$  entre les modes  $m$  et  $n$ , il est nécessaire de déterminer la vitesse de la cavité Fabry-Perot.

La méthode utilisée pour cela est celle présentée un peu plus haut. À partir de cette mesure, les RdC sont extraits de la façon suivante :

$$\text{RdC} = \frac{L_{\text{Fabry-Perot}}}{1 - \cos^2 \left( \pi \frac{d_{0n}/n}{d_{00}} \right)} \quad (2.52)$$

La table 2.4 résume les mesures obtenues à partir des données et de la simulation.

Nous avons un très bon accord pour le RdC du miroir NE mais une différence de  $70 \pm 25$  m pour le miroir WE entre les mesures en laboratoire et in-situ. Cette différence n'est pas encore comprise. Les tables 2.5 et 2.6 résument les mesures faites au LMA de Lyon ainsi que les spécifications que doivent respecter les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot. Nous observons une différence entre les deux. Cependant, les caractéristiques des miroirs évalués in situ sont proches de celles mesurées au LMA de Lyon.

#### *La réflectivité du miroir de recyclage*

La réflectivité du miroir de recyclage est extraite de l'évaluation du pseudo gain ( $g_0$ ) de recyclage de la porteuse dans le CITF (voir page 69). Ce pseudo gain est défini de la façon suivante :

$$g_0 = \frac{1}{1 - r_{PR} r_{MICH}} \quad (2.53)$$

	Mode TEM <sub>mn</sub>	Données
RdC du miroir NE	m + n = 1	3555 ± 20 m
	m + n = 2	3550 ± 10 m
RdC du miroir WE	m + n = 1	3570 ± 40 m
	m + n = 2	3540 ± 20 m

**TAB. 2.4:** Table qui résume les valeurs de RdC estimées à partir des données (in-situ).

	Spécifications pour Virgo	Mesures faites au LMA de Lyon
Diamètre (mm)	350 ± 0.5	350 ± 0.5
Épaisseur (mm)	96 ± 0.5	95.7 ± 0.1
Transmittivité	10 ppm < t <sub>NE</sub> <sup>2</sup> < 50 ppm	42.9 ± 0.2
Rayon de courbure (RdC)	3450 ± 100 m	3580 ± 17 m

**TAB. 2.5:** Caractéristiques optiques du miroir de fond du bras Nord (NE)

	Spécifications pour Virgo	Mesures faites au LMA de Lyon
Diamètre (mm)	350 ± 0.5	350 ± 0.5
Épaisseur (mm)	96 ± 0.5	95.7 ± 0.1
Transmittivité	10 ppm < t <sub>WE</sub> <sup>2</sup> < 50 ppm	38.3 ± 0.7
Rayon de courbure (RdC)	3450 ± 100 m	3601 ± 15 m

**TAB. 2.6:** Caractéristiques optiques du miroir de fond du bras Ouest (WE)

Nous mesurons  $g_0$  en comparant la puissance sur la photodiode B5 (voir page 70) obtenue dans la configuration optique du Michelson avec celle du CITF locké sur la porteuse. Alors, nous avons :

$$g_0 = \sqrt{\frac{P_{\text{CITF}_{\text{Porteuse}}}}{P_{\text{MICH}}}} \quad (2.54)$$

Dans la configuration optique du Michelson, la puissance que mesure la photodiode B5 est :

$$P_{B5}^{\text{MICH}} = \kappa \sum_{-n}^n J_k(m) P_{in} \quad (2.55)$$

Or  $J_0(m) \gg J_k(m)$  avec  $k \neq 0$ .

Alors, la puissance que mesure B5 dans la configuration Michelson est constante :

$$P_{B5}^{\text{MICH}} = \kappa J_0(m) P_{in} \quad (2.56)$$

En ce qui concerne, la réflectivité équivalente du Michelson nous avons  $r_{\text{MICH}} = r_{\text{NI}}$  car les réflectivités des miroirs d'entrée des bras peuvent être considérées comme égales. Alors, nous avons :

$$r_{\text{PR}} = \frac{1}{r_{\text{NI}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{P_{\text{MICH}}}{P_{\text{CITF}_{\text{Porteuse}}}}} \right) \quad (2.57)$$

avec  $r_{\text{NI}}^2 = (88.0 \pm 0.5)\%$  nous obtenons  $r_{\text{PR}}^2 = (92 \pm 1.6)\%$ .

## 2.4. BRUITS LIMITANTS DE VIRGO

	Spécifications pour Virgo	Mesures faites au LMA de Lyon
Diamètre (mm)	120 $\pm$ 0.5	120.26 $\pm$ 0.02
Epaisseur (mm)	30 $\pm$ 0.5	30.02 $\pm$ 0.01
$t_{\text{PR}}^2$	8 $\pm$ 1 %	7.83 $\pm$ 0.03 %

**TAB. 2.7:** Caractéristiques optiques du miroir de recyclage (PR).

Les mesures effectuées au LMA de Lyon ainsi que les spécifications sur le miroir de recyclage sont présentées sur le tableau 2.7.

Seule, la réflectivité du miroir de recyclage a été mesurée in situ et elle est en bon accord avec les mesures du LMA de Lyon (tableau 2.7).

	Spécifications pour Virgo	Mesures faites au LMA de Lyon
Diamètre (mm)	230 $\pm$ 0.5	230 $\pm$ 0.02
Epaisseur (mm)	55 $\pm$ 0.5	55.4 $\pm$ 0.1
$r_{\text{BS}}^2$	50 $\pm$ 0.5 %	50.25 $\pm$ 0.18 %
Réflectivité de la deuxième face de la séparatrice	$r_{\text{BS}}^{2II} < 1000$ ppm	519 $\pm$ 10 ppm

**TAB. 2.8:** Caractéristiques optiques de la séparatrice (BS).

En ce qui concerne la séparatrice, aucune mesure n'a été effectuée in situ pour évaluer ses différentes caractéristiques optiques. Ainsi, nous employons celles établis par le LMA de Lyon (voir table 2.8).

Nous avons vu dans cette partie les techniques mises en place pour évaluer les caractéristiques des miroirs qui importent pour les activités du Locking et de l'Alignement (voir Chapitre 3). Ces valeurs sont proches de celles mesurées au LMA de Lyon et sont utilisées dans les simulations de l'interféromètre.

## 2.4 Bruits limitants de VIRGO

La sensibilité de Virgo est limitée par différents bruits. Nous pouvons les classer en deux catégories : bruit fondamentaux et bruits technologiques. Comme bruits fondamentaux, nous avons le bruit quantique et le bruit de shot noise. Nous pouvons également y ajouter le bruit thermique qui sera décrit dans la suite. Les bruits technologiques désignent les bruits instrumentaux (les performances du laser, les performances de l'électronique...) ainsi que le bruit sismique. Le document [46] fait un état des lieux de tous ces bruits. Nous présentons dans ce qui suit les bruits qui dominent la courbe de sensibilité.

### Bruit sismique

L'activité sismique affecte la position des miroirs à travers des déplacements horizontaux transmis directement ou par couplage aux déplacements verticaux.

Les directions verticales aux deux extrémités des cavités Fabry-Perot ne sont pas parallèles mais forment un angle  $\theta_{\text{vert/hor}} = L/R$  où  $R$  est le rayon terrestre. Le faisceau parcourant la cavité n'est donc pas orthogonal à l'axe de la suspension. Les mouvements dans l'axe du faisceau ( $z$ ) sont donc couplés avec le bruit sismique vertical.

Une approximation du bruit sismique  $X_S(f)$  sur le site de Cascina est donnée par la relation suivante :

$$X_S(f) \sim 10^{-11} \left( \frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 / \sqrt{\text{Hz}} \quad \text{pour } f \geq 0.5 \text{ Hz} \quad (2.58)$$

Pour atténuer les mouvements de chaque degré de liberté, les miroirs sont suspendus à un super atténuateur (voir page 46). La densité spectrale du bruit sismique en équivalent d'amplitude d'onde gravitationnelle au niveau de chaque miroir s'écrit alors :

$$\tilde{h}_{\text{sismique}} = \frac{2}{L} \sqrt{T_h(f)^2 + [\theta T_v(f)]^2} X_S(f) \quad (2.59)$$

où  $T_h(f)$  et  $T_v(f)$  sont respectivement les fonctions de transfert du super atténuateur dans les degrés de liberté horizontal et vertical. Nous obtenons :

$$\tilde{h}_{\text{sismique}} \sim \frac{2}{3000} \sqrt{\left( \frac{1}{f^{14}} \right)^2 + \left[ 2.35 \cdot 10^{-4} \left( \frac{1}{f^{12}} \right) \right]^2} 10^{-11} \left( \frac{10 \text{ Hz}}{f} \right)^2 / \sqrt{\text{Hz}} \quad (2.60)$$

Ainsi, le bruit sismique domine la sensibilité du détecteur jusqu'à 4 Hz environ et rend toute détection impossible à des fréquences inférieures. Par contre, il devient complètement négligeable au delà de 10 Hz.

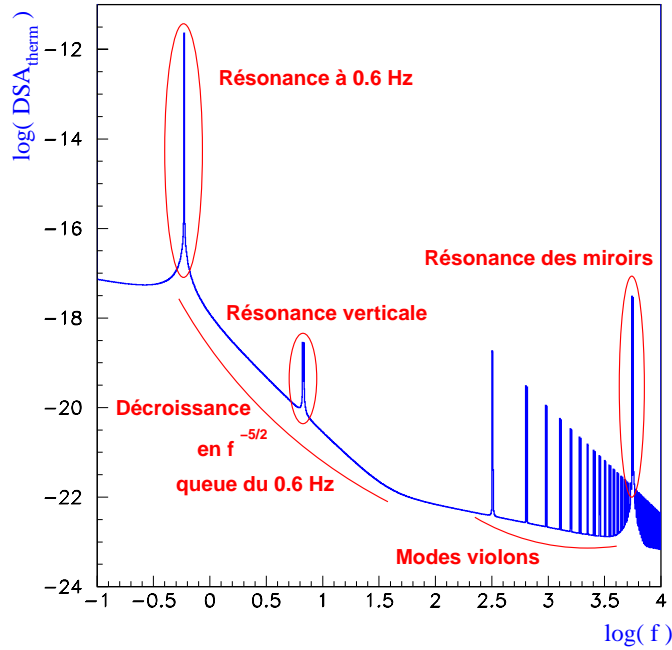
### Bruit thermique

Les bruits thermiques de l'ensemble { suspensions + miroirs } dominent dans la bande de fréquence intermédiaire de Virgo [4 Hz ; 500 Hz] environ. Ils sont causés par l'excitation des substrats des miroirs et des fils de suspension sous l'effet de la température comme l'illustre la figure 2.14.

Le modèle adopté est celui de dissipation interne car les miroirs sont plongés dans un vide poussé, l'amortissement visqueux "classique" est alors négligeable. À l'aide du théorème fluctuation-dissipation [44], nous pouvons calculer la densité spectrale d'amplitude du bruit thermique  $x_{\text{thermique}}(f)$  d'un composant donné à une température  $T$ , assimilé à un oscillateur de fréquence de résonance  $f_{\text{résonance}}$ , de facteur de qualité  $Q$  et de masse  $m$  :

$$x_{\text{thermique}}(f) = \sqrt{\frac{k_B T f_{\text{résonance}}^2}{2 \pi^3 m Q f} \frac{1}{(f^2 - f_{\text{résonance}}^2)^2 + \frac{f_{\text{résonance}}^4}{Q^2}}} \quad (2.61)$$

- Pour  $f \ll f_{\text{résonance}}$ , le bruit est en  $f^{-1/2}$
- pour  $f \gg f_{\text{résonance}}$ , le bruit est en  $f^{-5/2}$



**FIG. 2.14:** Densité Spectrale d'Amplitude totale associée au bruit thermique pour le détecteur Virgo où apparaissent ses différentes contributions. La queue de la résonance du pendule équivalent au super atténuateur à 0.6 Hz domine le spectre thermique jusqu'à une cinquantaine de Hz. Sa contribution décroît en  $f^{-5/2}$ .

Les suspensions contribuent de trois manières différentes au bruit thermique (voir figure 2.14) :

- la fonction de transfert du mode pendule du miroir possède une fréquence de résonance  $f_{\text{résonance}} \approx 0.6$  Hz et décroît en  $f^{-5/2}$ . Sa contribution domine le bruit thermique jusqu'à une cinquantaine de Hz ;
- ensuite, la première résonance apparaissant sur la courbe de sensibilité de Virgo correspond à une oscillation verticale à  $f_{\text{résonance}} \sim 6.7$  Hz qui se transmet horizontalement par l'intermédiaire de l'angle de couplage  $\theta_{\text{vert/hor}}$  ;
- plus loin dans le spectre, nous trouvons les modes vibrant des fils (ou modes violons) de suspension, harmoniques d'un mode fondamental résonant pour  $f_{\text{résonance}} \sim 327$  Hz ;
- enfin, au delà de 5.5 kHz, nous avons les résonances des substrats composants les miroirs. Elles sont caractérisées par un très grand facteur de qualité  $Q \sim 7 \cdot 10^5$ .

Finalement, la courbe de sensibilité de l'interféromètre mesure la somme de tous ces bruits sur le signal de frange noire. La figure 2.15 donne une vue globale des différents composants de ce bruit.

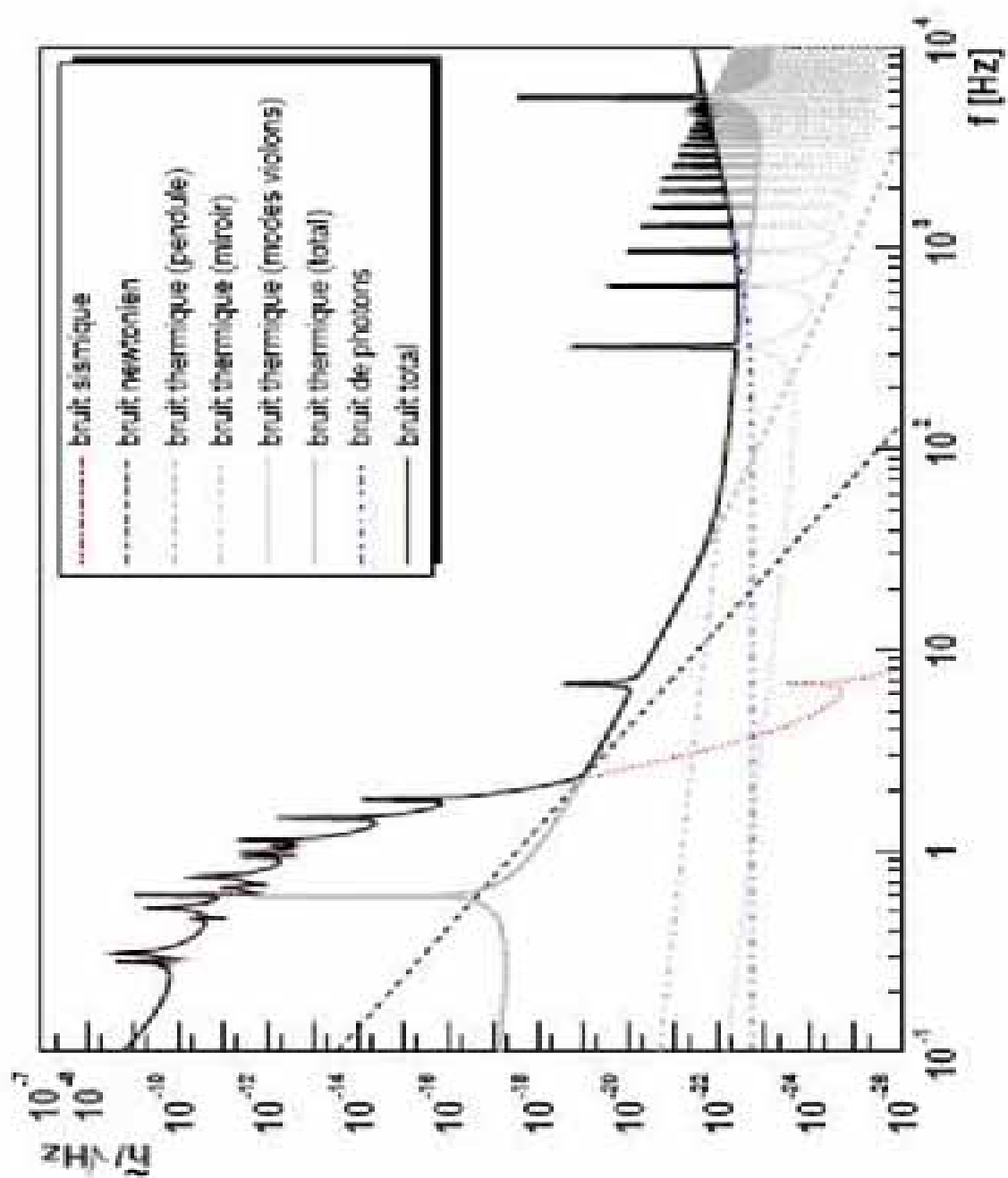


FIG. 2.15: Courbe de sensibilité estimé de Virgo avec les contributions des différents bruits.

## 2.5 Autres interféromètre dans le monde

Différents projets dans le monde ont pour objectif la première détection directe d'une onde gravitationnelle. Certains de ces projets ont adopté une architecture optique proche de Virgo comme TAMA et LIGO et d'autres ont choisi des architectures un peu différentes.

### 2.5.1 Architecture VIRGO

#### TAMA

Le projet japonais TAMA possède des bras de 300 m et fonctionne depuis août 2002. La figure 2.16 illustre la courbe de sensibilité obtenue lors de leur prise de données entre novembre 2003 et janvier 2004. Nous pouvons voir qu'à basse fréquence les bruits de contrôles dominant. Les courbes de sensibilités mesurée et théorique sont comparables au dessus de 500 Hz.

Comme attendu du fait de sa taille réduite ainsi que du faible gain de recyclage ( $G_{\text{rec}} = 4.5$ ), la sensibilité de TAMA ne peut être meilleure que  $10^{-21} / \sqrt{\text{Hz}}$ .

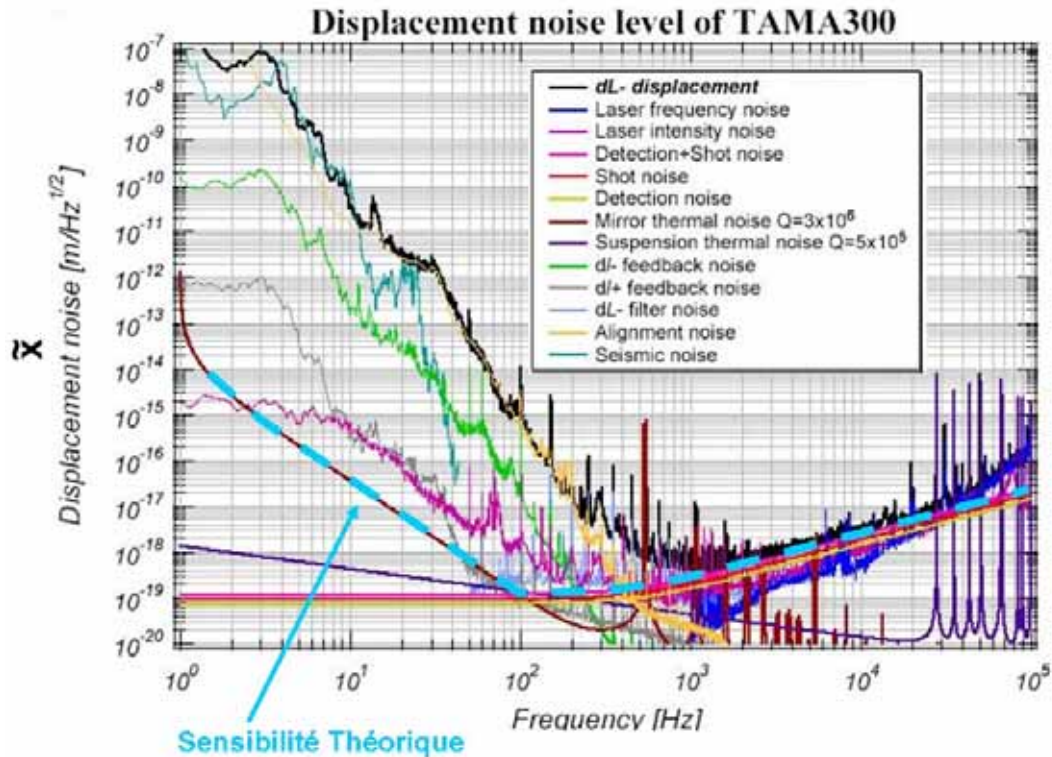
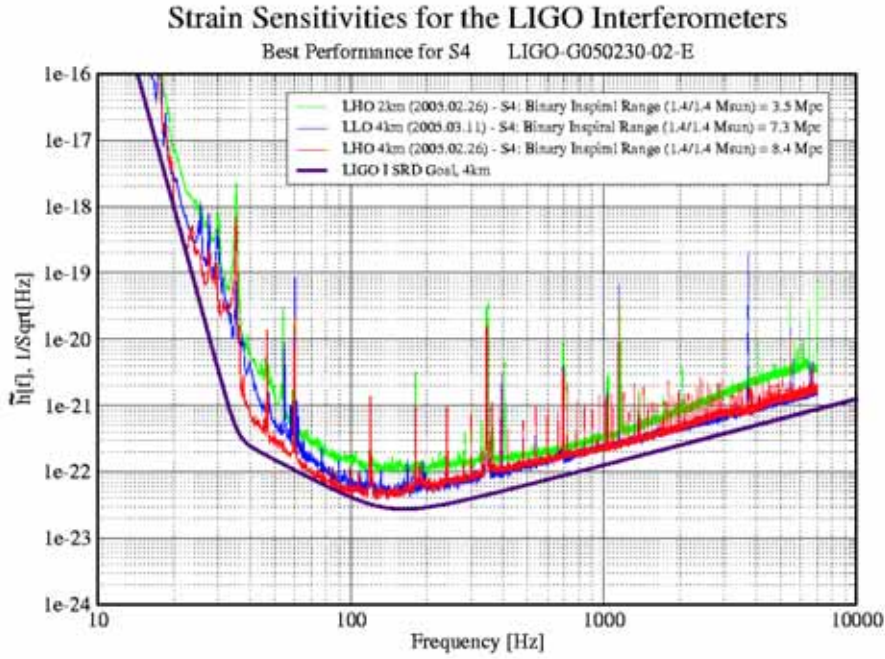


FIG. 2.16: Courbe de sensibilité théorique et mesurée par la collaboration TAMA lors de leur prise de données entre novembre 2003 et janvier 2004. Les différentes contributions des bruits sont également indiquées.



## LIGO

La collaboration LIGO (Laser Interferometer Gravitational wave Observatory) exploite trois détecteurs : deux situés à Hanford dans l'état de Washington possédant des bras de 2 km et de 4 km et le dernier à Livingston dans l'état de Louisiane possédant des bras de 4 km. Ces deux endroits sont éloignés de 3000 km. L'architecture des interféromètres de la collaboration LIGO sont très proches de Virgo. Cependant, quelques différences existent : la finesse des cavités Fabry-Perot est de 200, quatres fois supérieurs que celle de Virgo ; la réflectivité du miroir de recyclage est plus élevée ; les suspensions sont plus simples ce qui limite la sensibilité des instruments de la collaboration LIGO à basse fréquence.



**FIG. 2.17:** Courbe de sensibilité mesuré et théorique des trois interféromètres de la collaboration LIGO lors de leurs prises de données scientifiques.

La figure 2.17 présente l'état des lieux des interféromètres de la collaboration LIGO lors de leurs dernières prises de données scientifiques (S4). La courbe de sensibilité (voir figure 2.18) établie le 17 Juin 2005 présente la contribution des différents bruits. Nous pouvons tout d'abord remarquer que l'interféromètre est proche de la courbe de sensibilité théorique. Nous voyons que la sensibilité maximale  $\sim 4.5 \times 10^{-22} / \sqrt{\text{Hz}}$  est proche de la sensibilité théorique maximale  $2.5 \times 10^{-22} / \sqrt{\text{Hz}}$ .

À basse fréquence, la contribution des bruits de contrôle sur les longueurs de la cavité de recyclage (PRCL) et de la différence de longueur des bras du Michelson (MICH) dominant (voir Chapitre 4). Cette contribution très proche du bruit sismique jusqu'à 40 Hz, est donc difficilement optimisable. Entre 40 Hz et 170 Hz, la courbe de sensibilité n'est pas bien comprise. Au delà, le bruit de fréquence du laser, très proche du shot noise domine.

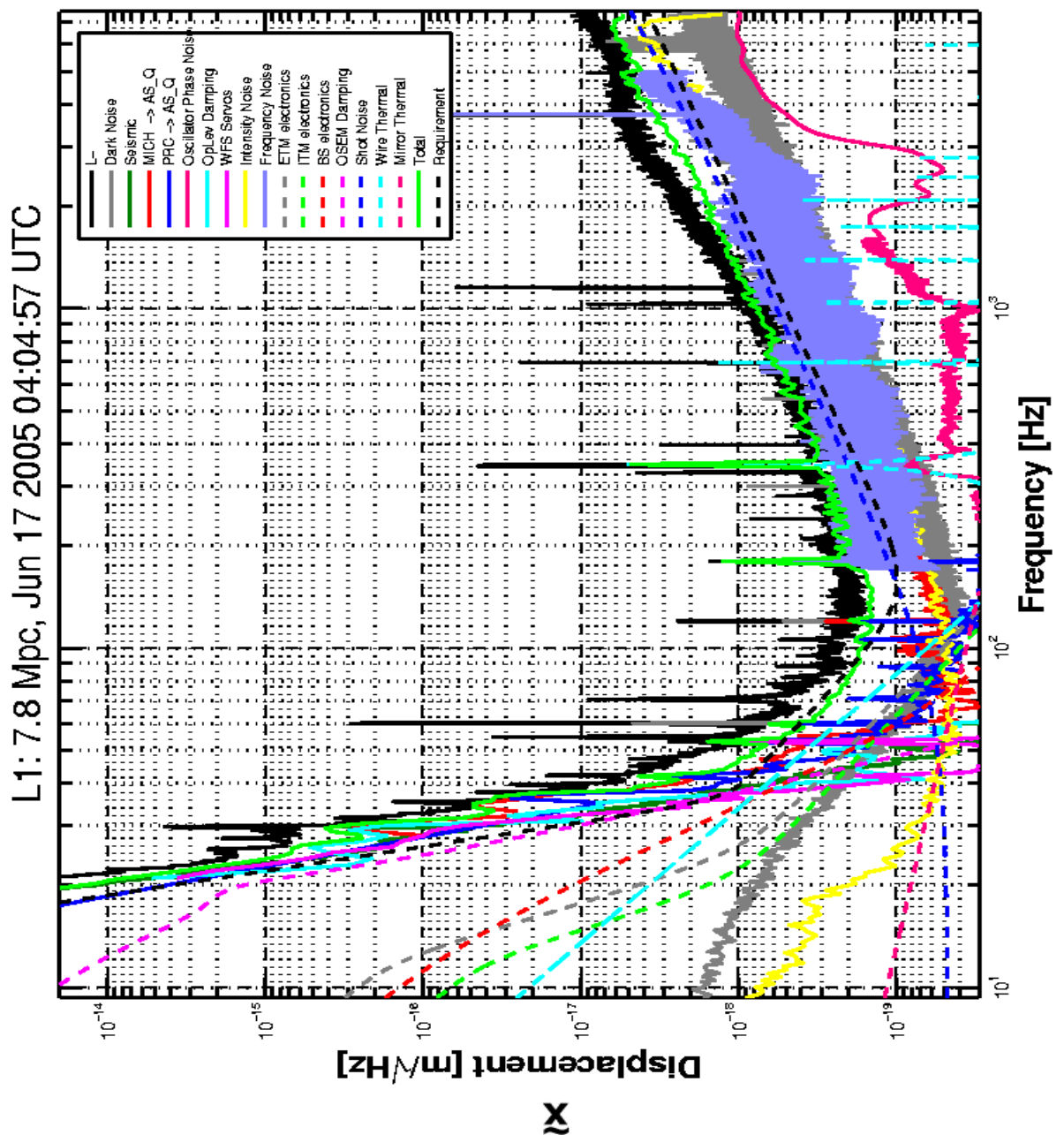


FIG. 2.18: Courbe de sensibilité de l'interféromètre de Livingston. Les différentes contributions à la courbe de sensibilité sont présentés.

### 2.5.2 Lignes à retard : GEO

GEO est une collaboration germano-britannique dont l'interféromètre est construit près de Hanovre, possède des bras de 600 m et utilise la technique de recyclage du signal. Cette expérience n'utilise pas de cavités Fabry-Perot mais des lignes à retard.

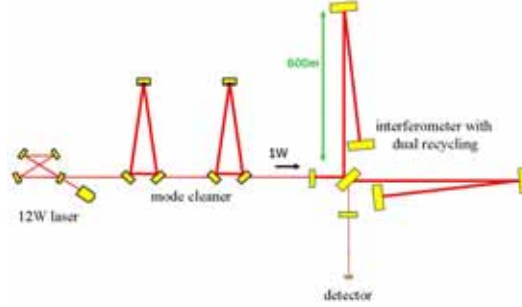


FIG. 2.19: Configuration optique de l'interféromètre GEO600.

Pour les instruments tel que Virgo le bruit qui limite la sensibilité est le bruit de shot noise. Pour réduire sa contribution, nous utilisons la technique de recyclage de puissance. Nous pouvons également améliorer la sensibilité du détecteur en augmentant le temps d'interaction de la lumière avec l'onde gravitationnelle. L'utilisation de lignes à retard<sup>5</sup> augmente le temps de stockage de la lumière dans les bras et permet ainsi d'arriver à un résultat similaire à celui obtenu avec des cavités Fabry-Perot (voir figure 2.19).

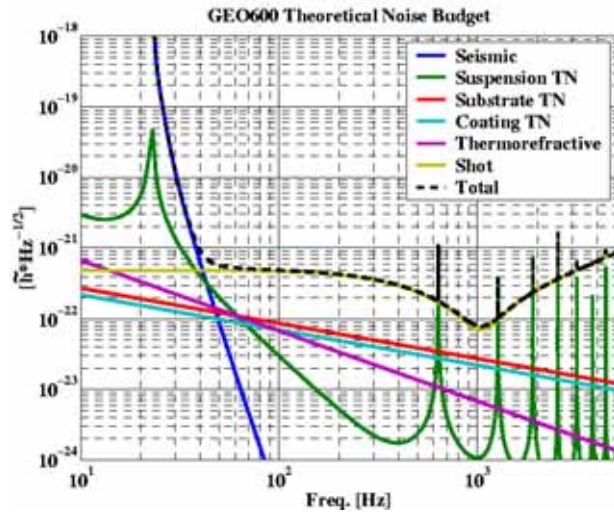


FIG. 2.20: Courbe de sensibilité théorique de l'interféromètre GEO600.

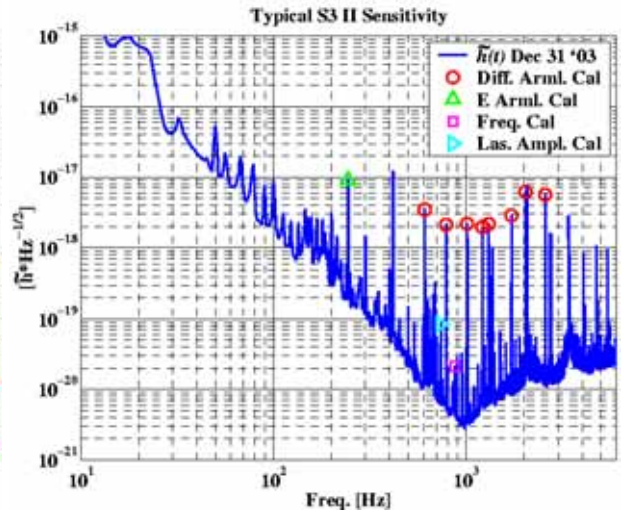


FIG. 2.21: Courbe de sensibilité mesurée par la collaboration GEO600 lors de leur prise de données entre décembre 2003 et janvier 2004. La légende représente les lignes de calibration du détecteur.

<sup>5</sup>Cavité optique de longueur  $L$  formée de deux miroirs concave de distance focale  $f$  et de rayon de courbure  $R = 2f$ .

L'installation d'un miroir entre la séparatrice et la photodiode de détection du signal de frange noire (voir figure 2.19) technique appelé recyclage du signal permet également d'améliorer la sensibilité de l'instrument sur une faible bande passante. L'expérience GEO600 est le premier détecteur à utiliser le Dual Recycling (recyclage de puissance + recyclage du signal) [47] [48].

Ainsi, la courbe de sensibilité (voir figure 2.20) de ce type de détecteur est assez différent des détecteurs tel que VIRGO. La sensibilité du détecteur GEO600 (voir figure 2.21) est proche de  $3 \times 10^{-21} / \sqrt{\text{Hz}}$  à 1 kHz encore éloigné de ce que prévoit la théorie :  $7 \times 10^{-23} / \sqrt{\text{Hz}}$  à 1 kHz.

L'existence de ces différents observatoires dans le monde est fondamentale. Il permettra une comparaison des données et permettra de donner des valeurs aux paramètres définissant l'onde gravitationnelle (vitesses des ondes, polarisations, spin du graviton...).



# Chapitre 3

## Locking : théorie et expérience

Virgo atteint son point de fonctionnement lorsque les conditions suivantes sont réunies : le Michelson sur la frange noire, la cavité de recyclage ainsi que les deux cavités Fabry-Perot à la résonance. Il est nécessaire de mettre en place un contrôle actif de la position angulaire et longitudinale des miroirs pour amener le détecteur à son point de fonctionnement et l'y maintenir. Les contraintes sont de l'ordre de  $10^{-10}$  m RMS pour le contrôle longitudinal et  $10^{-9}$  rad RMS pour le contrôle angulaire.

Pour obtenir ce résultat, nous utilisons des signaux d'erreurs produits par le système de détection. Un organe central, appelé Contrôle Global, les reçoit, les traite et les convertit en signaux de corrections envoyés vers les miroirs pour pouvoir contrôler les différents degrés de liberté de l'interféromètre.

Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord les principes du contrôle longitudinal d'une cavité Fabry-Perot appelé par la suite Locking. Ensuite, nous verrons l'apport de la simulation dans la préparation de l'aspect expérimental de cette activité. La boucle de contrôle et ses acteurs dont le Contrôle Global seront aussi présentés.

### 3.1 Définition du point de fonctionnement de Virgo

Le point de fonctionnement de Virgo définit quelles spécifications doivent satisfaire les longueurs (voir figure 3.1) des cavités optiques et les positions angulaires des miroirs.

#### 3.1.1 Spécifications sur les longueurs des cavités optiques

Les spécifications à respecter pour le contrôle des longueurs des cavités optiques sont données dans ce qui suit en terme de valeur RMS.

- Les fluctuations de la longueur des cavités Fabry-Perot doivent être inférieures à 10 % de la demi-largeur du pic d'Airy ( $\frac{\lambda}{4\mathcal{F}}$ ) soit :

$$\delta L_{N/W} < \frac{1}{10} \frac{\lambda}{4\mathcal{F}} \sim 5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

où  $\mathcal{F}$  est la finesse des cavités Fabry-Perot ( $\mathcal{F} \sim 50$ ).

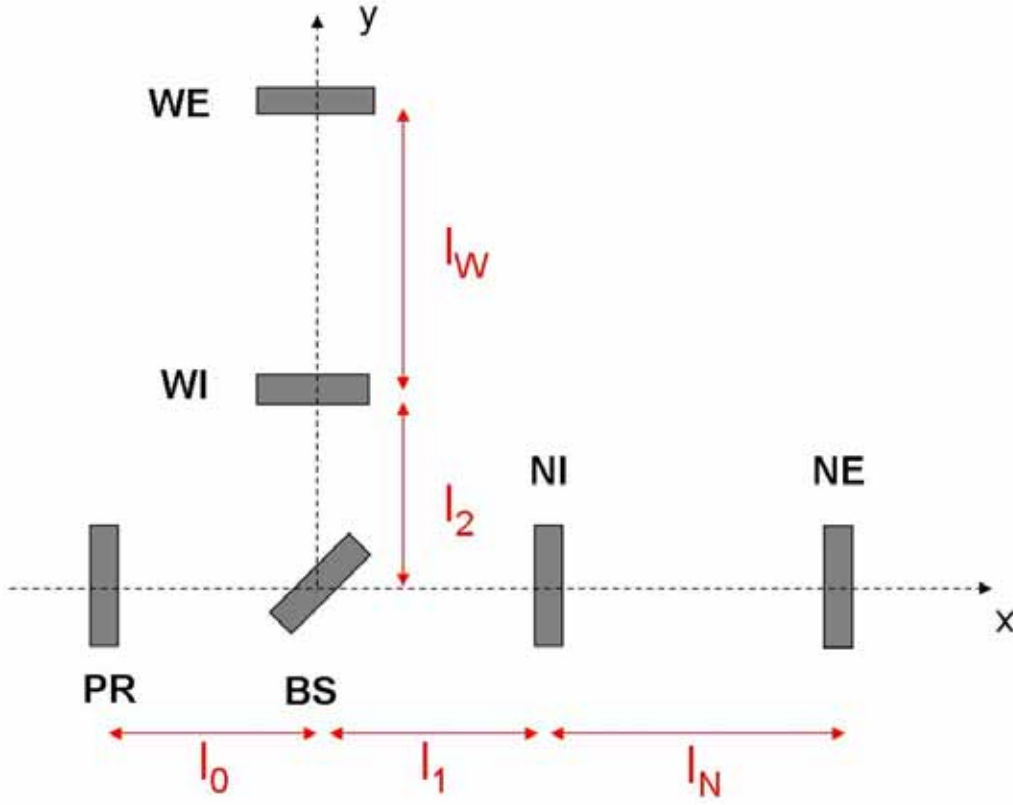


FIG. 3.1: Longueurs caractéristiques de Virgo que nous devons contrôler.

- La même contrainte est valable pour la longueur de recyclage  $l_r = l_0 + \frac{l_1 + l_2}{2}$  :

$$\delta l_r < \frac{1}{10} \frac{\lambda}{4 \mathcal{F}_r} \sim 3.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

où  $\mathcal{F}_r$  est la finesse de la cavité de recyclage ( $\mathcal{F}_r \sim 75$ ).

- Pour la frange noire, la contrainte la plus importante est donnée par la fluctuation de puissance du laser car celle-ci se couple avec les asymétries de l'interféromètre et peut dépasser la limite du shot noise. En notant  $l_{\text{MICH}} = l_1 - l_2$ , alors :

$$\delta l_{\text{MICH}} < \frac{\lambda}{4 \pi} \sqrt{\frac{h c}{\lambda P \eta}} \frac{\delta \tilde{P}}{P} \sim 10^{-10} \text{ m}$$

en supposant une puissance incidente sur la séparatrice de 1 kW et une fluctuation de puissance de  $\frac{\delta \tilde{P}}{P} \sim 10^{-8}/\sqrt{Hz}$ .

### Le Locking

Grace aux contrôles locaux (voir page 68), les déplacements longitudinaux des cavités optiques sont de l'ordre de 1  $\mu\text{m}$ . Un contrôle actif de la longueur des cavités optiques est nécessaire pour répondre aux spécifications : le Locking.

#### 3.1.2 Spécifications angulaires

Un contrôle des mouvements angulaires des miroirs est aussi nécessaire. La direction du faisceau doit aussi être contrôlée.

La fluctuation de la direction du faisceau se couple avec le désalignement statique des miroirs [39] et induit un bruit qui peut limiter la sensibilité de Virgo. Dans le cas du désalignement pour la cavité de recyclage, nous avons :

$$\delta\theta_{laser} \delta x < \frac{1 + r_{PR}}{1 - r_{PR}} \sqrt{\frac{hc}{\lambda P}} \frac{\lambda}{4\pi} \quad (3.1)$$

où  $r_{PR}$  est la réflectivité du miroir de recyclage,  $\delta\theta_{laser}$  est la fluctuation angulaire du faisceau laser (jitter) et  $\delta x$  est le déplacement de l'axe du faisceau.

Pour les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot,  $\delta x = R \delta\theta$  (où  $R$  est le rayon de courbure des miroirs  $\sim 3450$  m) et  $\delta x = (R - L) \delta\theta$  pour les miroirs d'entrée des cavités Fabry-Perot.

Supposant une fluctuation de la direction du faisceau de  $10^{-11}$  rad/ $\sqrt{\text{Hz}}$  à l'entrée de l'interféromètre, les contraintes angulaires (RMS) sont :

$$\delta\theta_{\text{miroir}} < \begin{cases} 10^{-7} \text{ rad pour le miroir de recyclage} \\ 2 \times 10^{-8} \text{ rad pour les miroirs d'entrée des Fabry-Perot} \\ 3 \times 10^{-9} \text{ rad pour les miroirs de fond des Fabry-Perot} \end{cases} \quad (3.2)$$

De manière symétrique, les fluctuations angulaires sont couplées au changement de la direction du faisceau. Supposant  $\delta\tilde{\theta} \sim 10^{-13}$  rad/ $\sqrt{\text{Hz}}$  dû au bruit thermique, nous obtenons :

$$\delta\theta_{laser} < 3 \times 10^{-7} \text{ rad} \quad (3.3)$$

#### L'Alignement

Grâce à l'utilisation des contrôles locaux, les déplacements angulaires des miroirs sont de l'ordre de  $1 \mu\text{rad}$ , loin des spécifications à atteindre. Un contrôle actif des mouvements angulaires des miroirs est alors nécessaire : l'Alignement. Ceci permet d'avoir uniquement le mode TEM<sub>00</sub> du laser dans l'interféromètre mais surtout de réduire au maximum le couplage de la fluctuation de la direction du faisceau laser avec le désalignement statique des miroirs. Il est indispensable de contrôler les longueurs des cavités optiques pour faire de l'Alignement.

#### 3.1.3 Le “Commissioning” de Virgo

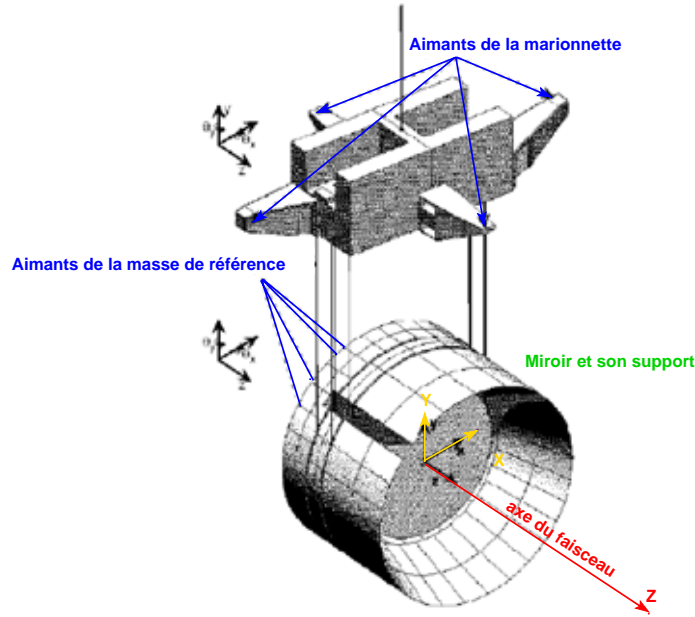
Le commissioning<sup>1</sup> de Virgo consiste à intégrer en plusieurs étapes tous les sous systèmes et à arriver au point de fonctionnement. La première étape a consisté à travailler avec la cavité Fabry-Perot Nord puis Ouest. Puis, nous avons travaillé dans le mode recombinaison de l'interféromètre (voir partie 3.1.4) et enfin dans la configuration Virgo.

---

<sup>1</sup>Mise au point.



### 3.1.4 Les contrôles locaux



**FIG. 3.2:** Vue de l'ensemble marionnette + miroir et masse de référence.

Les contrôles locaux sont associés à chaque suspension (miroir + marionnette)(voir figure 3.2). Les objectifs à atteindre sont les suivants :

- amortir les mouvements angulaires du miroir jusqu'à quelques  $\mu\text{rad}$ , valeur nécessaire pour l'acquisition du lock de Virgo ;
- pouvoir maintenir et retrouver la position de référence angulaire pour chaque miroir ;
- garder l'interféromètre aligné ;
- maintenir le mouvement longitudinal des miroirs à quelques  $\mu\text{m/s}$ .

Les signaux d'erreurs utilisés pour le contrôle angulaire des miroirs sont obtenus à l'aide d'une caméra CCD<sup>2</sup> et d'un logiciel d'analyse d'images appelé Gx [51] qui permet d'accéder aux oscillations du miroir et de la marionnette. Deux modes de fonctionnement sont possibles :

- le mode grossier : deux caméras suivent des marqueurs éclairés par une lampe halogène et placés sur les miroirs ainsi que sur la marionnette ;
- le mode fin : les deux caméras suivent deux faisceaux laser annexe (longueur d'onde visible) qui se réfléchissent sur le substrat et sur un petit miroir placé sous la marionnette.

<sup>2</sup>Charge Coupled Device.

### 3.1. DÉFINITION DU POINT DE FONCTIONNEMENT DE VIRGO

Dès que les faisceaux annexes sont détectés par la caméra, le contrôle passe du mode grossier au mode fin. Ces contrôles actifs agissent directement sur les miroirs, ce qui peut avoir des conséquences dramatiques sur ceux-ci en cas de dysfonctionnement. Un programme de sécurité appelé “Guardian” [52] a donc été mis en place. Il surveille les mouvements du sommet de la suspension et ceux au niveau de la marionnette ; en cas d’oscillation trop importante, la boucle de contrôle concernée est automatiquement ouverte. Les contrôles locaux permettent d’amener l’interféromètre dans des conditions de travail raisonnables.

#### Différentes configurations optiques possibles

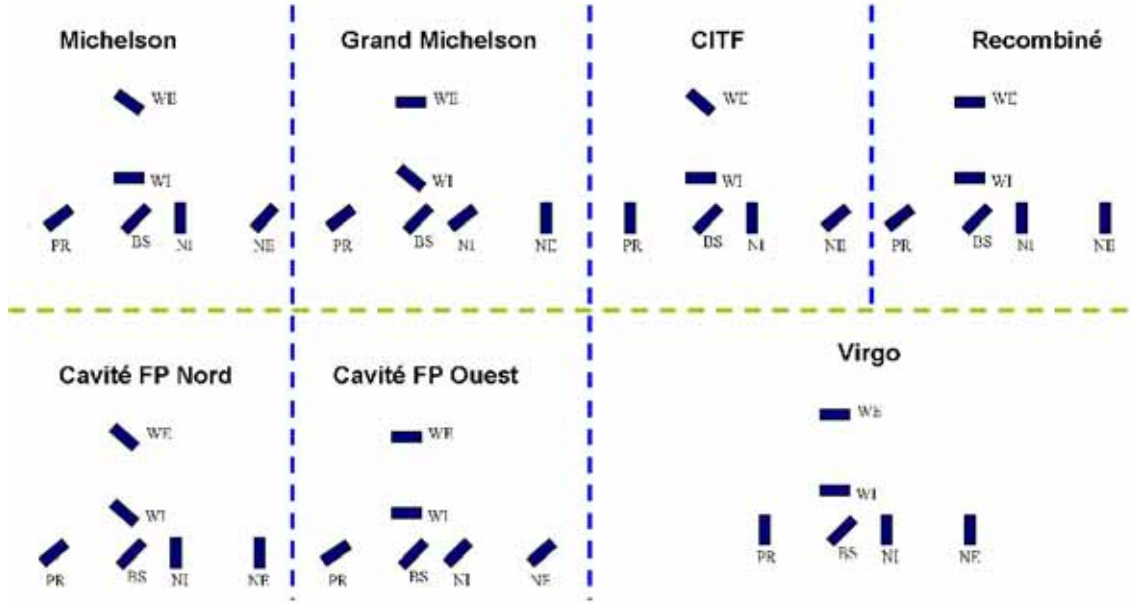


FIG. 3.3: Différentes configurations optiques possibles par l’utilisation des contrôles locaux.

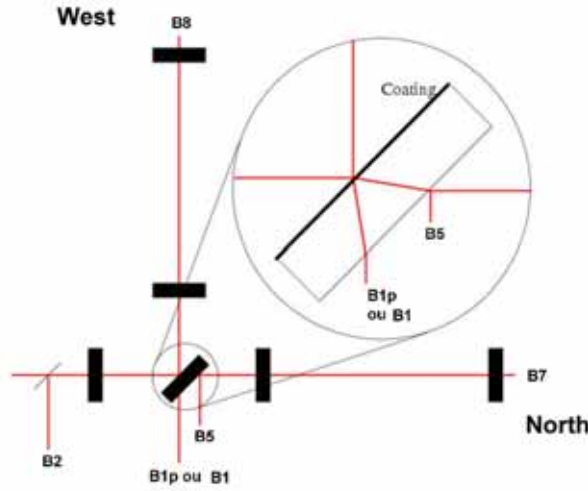
Une autre utilisation des contrôles locaux est de pouvoir changer de configuration optique. Pour cela, nous appliquons une tension continue sur le contrôle angulaire en  $\theta_x$  des miroirs pour les désaligner de plusieurs milli-radians. Nous allons énumérer dans ce qui suit certaines des configurations optiques employées durant le commissioning de Virgo (voir figure 3.3) :

- Michelson : il est formé des miroirs BS, NI et WI. Nous avons pour cela désaligné les miroirs PR, NE et WE ;
- Grand Michelson : il est formé des miroirs BS, NE et WE. Nous avons pour cela désaligné les miroirs PR, NI et WI ;
- Cavité Fabry-Perot Nord : elle est formée des miroirs BS, NI et NE. Nous avons pour cela désaligné les miroirs PR, WI et WE ;

- Cavité Fabry-Perot Ouest : elle est formée des miroirs BS, WI et WE. Nous avons pour cela désaligné les miroirs PR, NI et NE ;
- CITF : il est formé des miroirs PR, BS, NI et WI. Nous avons pour cela désaligné les miroirs NE et WE ;
- Recombiné : il est formé des miroirs PR, BS, NI, WI, NE et WE. Nous avons pour cela désaligné le miroir PR.

Pour arriver à contrôler les longueurs caractéristiques de chaque configuration optique, il est nécessaire de disposer d'un ensemble de photodiodes associées à un système de traitement électronique produisant les signaux d'erreurs utilisés par les boucles d'asservissement.

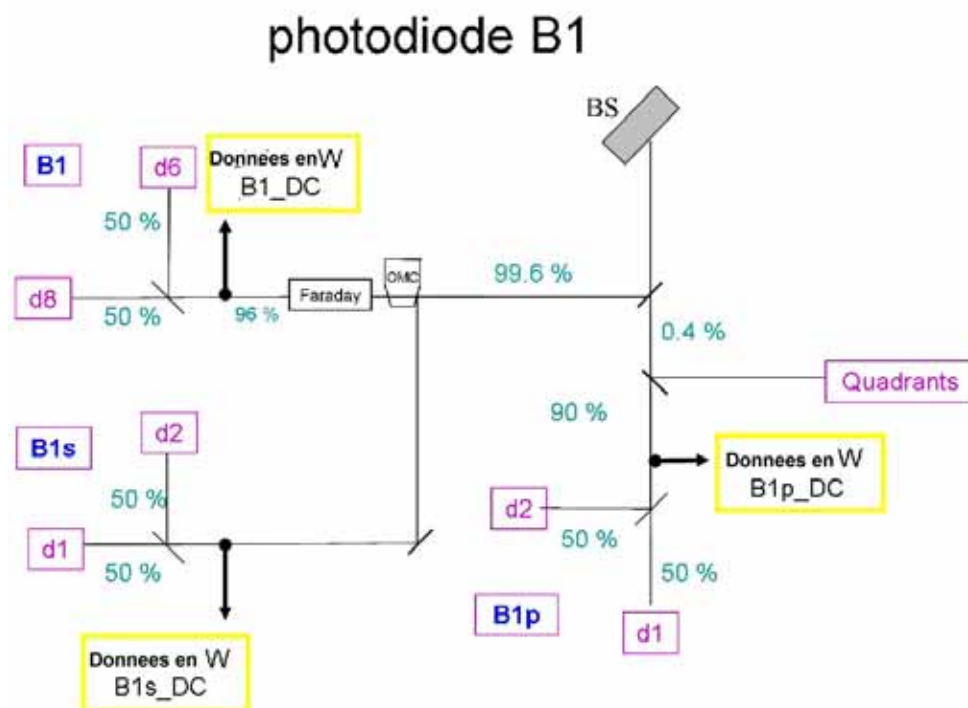
### 3.1.5 La disposition des photodiodes



**FIG. 3.4:** Disposition des photodiodes (B1p...) utilisées pour le contrôle longitudinale des cavités optiques de Virgo.

Pour analyser le comportement de l'interféromètre, les signaux produits par cinq photodiodes (voir figure 3.4) sont utilisés. Nous allons dans ce qui suit décrire les champs détectés et le système de détection installé sur chacune de ces photodiodes :

- La photodiode B2 : elle mesure la lumière réfléchie par l'interféromètre. Le système de détection associé à la photodiode B2 permet d'obtenir un signal en DC et des signaux démodulés à  $\Omega$  et à  $3\Omega$  (voir partie 3.2.1).
- Les photodiodes B1p et B1 (voir figure 3.5) : elles détectent le signal de frange noire. Le système de détection associé à la photodiode B1p, permet d'obtenir un signal en DC et des signaux démodulés à  $\Omega$ . La photodiode B1 mesure le signal de frange noire filtré par le mode cleaner de sortie et délivre le même type de signaux que la photodiode B1p.



**FIG. 3.5:** Différents signaux accessibles à partir du système de détection B1. Les pourcentages indiquent les réflectivités et transmittivités des miroirs permettant de distribuer le faisceau sur les différentes photodiodes.

- La photodiode B5 : elle mesure la lumière réfléchiée par la cavité Fabry-Perot après sa réflexion par la deuxième face de la séparatrice. Le système de détection associé à la photodiode B5, permet d'obtenir un signal en DC et des signaux démodulés à  $\Omega$  et à  $2\Omega$ .
- Les photodiodes B7 et B8 : elles détectent la lumière transmise par les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot Nord et Ouest. Le système de détection associé aux deux photodiodes, permet d'obtenir un signal en DC et des signaux démodulés à  $\Omega$ .

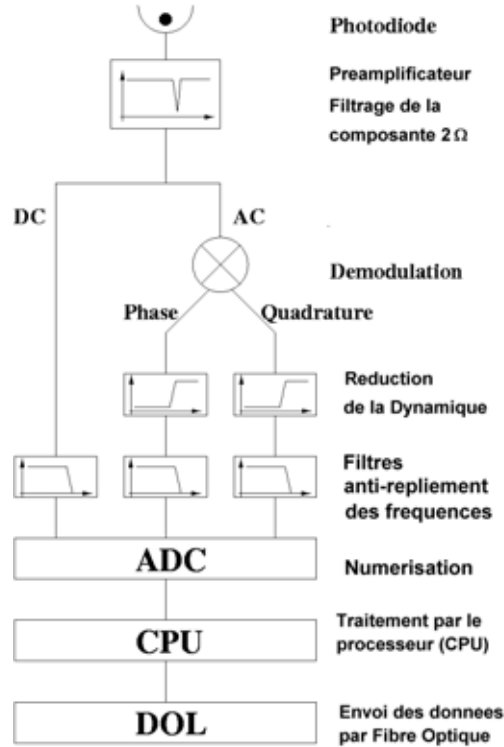
Nous allons dans ce qui suit décrire plus en détail le système de détection associé aux photodiodes.

#### Le système de détection des photodiodes

Le système de détection est décrit de manière complète dans la référence [53] et nous allons en présenter les grandes lignes. L'architecture de lecture des signaux de photodiodes est la même pour tous les faisceaux.

En sortie des bras des cavités Fabry-Perot nous avons placé deux photodiodes. En effet, durant le processus d'acquisition du lock, la puissance arrivant sur ces photodiodes est multipliée par un facteur 25 000. La plage dynamique de l'ADC<sup>3</sup> ne permet pas de répondre à cette variation de puissance. Deux photodiodes sont donc installées : l'une à bas gain (grande puissance) et l'autre à haut gain (faible puissance).

<sup>3</sup>Analog to Digital Converter.



**FIG. 3.6:** Système de lecture des signaux reçus par les photodiodes. Les signaux d'erreurs produits sont ceux obtenus par une démodulation à  $\Omega$ .

Le passage d'une photodiode à l'autre est effectué automatiquement lorsque l'amplitude atteint 90 % du seuil maximal de l'ADC sur la photodiode à haut gain. La transition est effectuée par le système d'acquisition des signaux de photodiodes.

Pour les autres faisceaux, seulement une photodiode est utilisée.

La chaîne d'acquisition des signaux de photodiodes est présentée sur la figure 3.6. Elle fonctionne à 20 kHz concernant l'acquisition des données mais délivre des signaux à 10 kHz pour le contrôle longitudinal (le Locking). Les principaux composants de cette chaîne sont :

- les photodiodes.  
Ce sont des photodiodes InGaAs fabriquées par HAMAMATSU. Leur diamètre est de 3 mm, leur efficacité quantique est proche de 90 % et leur réponse  $\eta = 0.77A/W$  ;
- le pré-amplificateur ;  
Il est placé juste après la photodiode et son rôle principal est de convertir le courant en tension et d'atténuer pour des raisons dynamiques le signal à deux fois la fréquence de modulation. L'atténuation (d'un facteur 1000) est effectuée par l'utilisation d'un filtre "notch"<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Filtre de la forme :  $\frac{1 + i\frac{f}{f_0}}{(1 + i\frac{f}{f_1})(1 + i\frac{f}{f_2})}$ .

- le démodulateur.  
Après le pré-amplificateur, les composantes DC et AC du signal sont séparées et le signal AC est démodulé pour pouvoir en extraire les signaux en phase et en quadrature ;
- le filtre de réduction dynamique.  
Sans traitement, la dynamique des signaux démodulés exige un ADC de 20 bits fonctionnant à 20 kHz qui n'existe pas dans le commerce. Puisque les signaux les plus forts se trouvent à basse fréquence et les plus faibles à haute fréquence, nous pouvons réduire la dynamique en utilisant un filtre passe-haut du second ordre. Ceci nous permet d'utiliser des ADC de 16 bits sans introduire de bruit de numérisation. L'inverse du filtre est appliqué par le CPU après la numérisation des signaux ;
- le filtre d'anti-aliasing.  
Pour pouvoir éliminer l'effet de repliement des fréquences au-dessus de la fréquence de Nyquist ( $f_{Nyquist} = f_{\text{échantillonnage}}/2$ ), nous devons atténuer ces composantes. Dans cette région, le bruit est dominé par les résonances thermiques des miroirs qui peuvent avoir un grand gain. Le filtrage est effectué par un filtre d'ordre 7, fait d'un filtre de Butterworth ( $G(f) = \frac{1}{1+(f/f_0)^4}$ ) plus trois notches (le premier situé à 20 kHz). Il permet une atténuation de  $10^4$  à 20 kHz ;
- la numérisation.  
Les cartes électroniques ADC ont une précision de 16 bits. La fréquence d'échantillonnage est de 20 kHz mais la fréquence de lecture est seulement de 10 kHz. Chaque carte possède deux mémoires pour la sauvegarde des données. L'ADC écrit sur une mémoire tandis que le CPU lit sur l'autre mémoire ;
- le processeur (CPU).  
Le processeur qui effectue les actions suivantes :
  1. lire les mémoires ADC (les deux dernières données à chaque fois) ;
  2. envoyer les données au système d'acquisition ;
  3. supprimer les "offsets"<sup>5</sup>, calibrer et appliquer le filtre inverse de celui utilisé durant la réduction dynamique du signal ;
  4. corriger le mélange entre phase et quadrature ;
  5. ajouter les signaux des photodiodes (uniquement la frange noire) ;
  6. envoyer la moyenne des deux dernières données au Contrôle Global et au système d'acquisition.

---

<sup>5</sup>Décalages.

---

## 3.2 Principes généraux du Locking

Selon les configurations optiques, le nombre de longueurs caractéristiques à contrôler est variable. Dans le cas de Virgo nous aurons quatres longueurs à contrôler. Nous allons dans cette partie à partir du contrôle longitudinal d'une cavité Fabry-Perot présenter les principes généraux du Locking. L'acquisition du lock d'une cavité se décompose en deux étapes.

### Phase d'acquisition du lock

La cavité optique se déplace librement. Par l'utilisation de la technique de linéarisation des signaux d'erreurs (voir plus loin) nous contrôlons la longueur de la cavité en question.

### Phase linéaire

Dans un deuxième temps, nous abandonnons la technique de la linéarisation des signaux d'erreurs. Nous utilisons directement le signal d'erreur pour contrôler la cavité en question. Ceci permet de réduire la contribution des bruits de contrôle à la courbe de sensibilité. Nous changeons éventuellement les signaux d'erreurs employés lors de l'acquisition du lock.

### 3.2.1 La technique Pound Drever

La technique Pound Drever [76] a été développée pour contrôler la longueur d'une cavité Fabry-Perot éclairée par un faisceau laser. Cette technique consiste à moduler en phase le champ entrant à la fréquence  $\Omega$ , choisie pour que les bandes latérales (BL) soient anti-résonantes dans la cavité.

La figure 3.7 présente un exemple de signaux d'erreurs obtenus par la technique Pound Drever pour une cavité Fabry-Perot. Le signal d'erreur est produit par le battement entre la porteuse et les bandes latérales. A la résonance, le signal d'erreur dépend linéairement de l'écart à la résonance et sa pente est déterminée par les caractéristiques optiques de la cavité.

### Calcul du signal Pound Drever démodulé à $\Omega$

Nous modulons en phase le laser par l'application d'une tension à une cellule de pockels que traverse le laser. La lumière entrant dans l'interféromètre s'écrit alors sous la forme suivante :

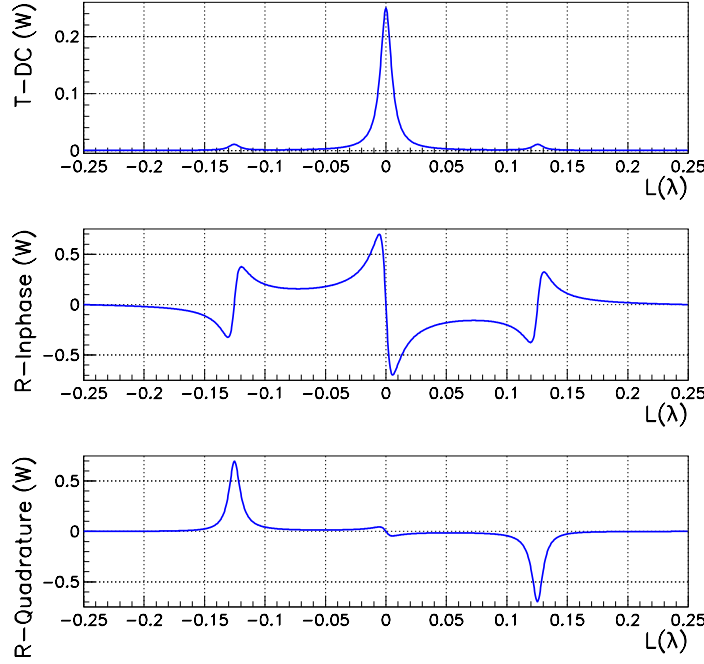
$$\begin{aligned}\psi_{in} &= \psi_0 e^{i(\omega_0 t + m \sin(\Omega t))} \\ \psi_{in} &= \psi_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) e^{i n \Omega t}\end{aligned}\tag{3.4}$$

avec  $J_n(m)$  les coefficients de Bessel.

Au premier ordre, nous avons donc :

$$\psi_{in} = \psi_0 e^{i\omega_0 t} \left[ J_0(m) + J_1(m) e^{i\Omega t} - J_1(m) e^{-i\Omega t} \right]\tag{3.5}$$


---



**FIG. 3.7:** Signaux d'erreurs Pound Drever pour une cavité Fabry-Perot.

En haut : puissance transmise en DC par la cavité Fabry-Perot. Au milieu : signal d'erreur en phase obtenu à partir de la lumière réfléchie par la cavité Fabry-Perot. En bas : signal d'erreur en quadrature obtenu à partir de la lumière réfléchie par la cavité Fabry-Perot. Le zéro du signal d'erreur en phase correspond à la résonance de la porteuse ou des bandes latérales.

Soit  $F(\omega)$  la fonction de transfert à un déplacement longitudinale d'une cavité optique, alors le champ au niveau d'une photodiode s'écrit :

$$\psi_{\text{photodiode}} = \psi_0 e^{i\omega_0 t} \left[ J_0 F(\omega_0) + J_1 F(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega t} - J_1 F(\omega_0 - \Omega) e^{-i\Omega t} \right] \quad (3.6)$$

La photodiode mesure une puissance :

$$P_{\text{photodiode}} = |\psi_0|^2 \left( \begin{aligned} &J_0^2 |F(\omega_0)|^2 + J_1^2 |F(\omega_0 + \Omega)|^2 + J_1^2 |F(\omega_0 - \Omega)|^2 \\ &+ J_0 J_1 2 \operatorname{Re} [F(\omega_0) F^*(\omega_0 + \Omega) - F^*(\omega_0) F(\omega_0 - \Omega) e^{i\Omega t}] \\ &- J_1^2 2 \operatorname{Re} [F(\omega_0 + \Omega) F^*(\omega_0 - \Omega) e^{i2\Omega t}] \end{aligned} \right) \quad (3.7)$$

Ainsi, la puissance que mesure la photodiode est la combinaison linéaire de composantes continues (DC) et de composantes aux fréquences  $\Omega$ ,  $2\Omega$ .

Le signal issu de la démodulation à  $\Omega$  en quadrature est :

$$P_{\text{Quadrature}}^\Omega = |\psi_0|^2 J_0 J_1 \operatorname{Re} [F^*(\omega_0) F(\omega_0 + \Omega) - F(\omega_0) F^*(\omega_0 - \Omega)] \quad (3.8)$$

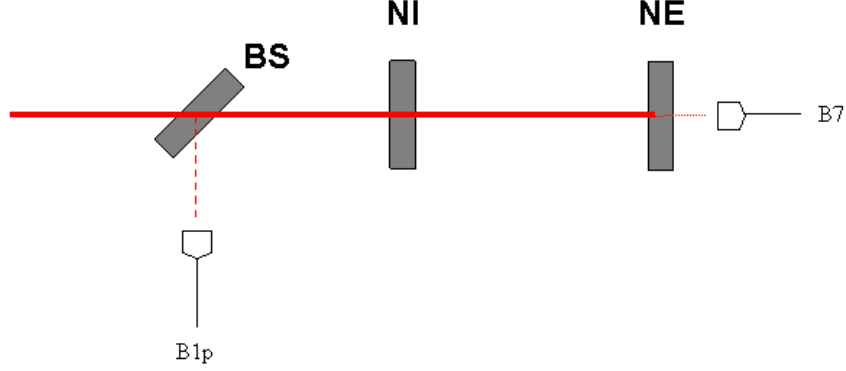
Dans le cas de la démodulation en phase, nous arrivons au résultat suivant :

$$P_{\text{Phase}}^\Omega = - |\psi_0|^2 J_0 J_1 \operatorname{Im} [F^*(\omega_0) F(\omega_0 + \Omega) - F(\omega_0) F^*(\omega_0 - \Omega)] \quad (3.9)$$



Par conséquent, les signaux démodulés à  $\Omega$  que nous utilisons comme signaux d'erreurs sont donnés par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} S_{\text{phase}} \\ S_{\text{quadrature}} \end{pmatrix} = |\psi_0|^2 J_0 J_1 \begin{pmatrix} -Im \\ Re \end{pmatrix} \left[ F^*(\omega_0) F(\omega_0 + \Omega) - F(\omega_0) F^*(\omega_0 - \Omega) \right] \quad (3.10)$$



**FIG. 3.8:** Représentation schématique de la cavité Fabry-Perot Nord de Virgo avec les photodiodes utilisées pour l'acquisition du lock de la cavité.

Nous allons expliciter la forme du signal Pound Drever sur la photodiode B1p (voir figure 3.8). Ecrivons la forme des champs utiles pour établir l'expression du signal Pound Drever.

La photodiode B1p mesure le champ réfléchi par la cavité Fabry-Perot :

$$\psi_{B1p}(\omega_0 + n\Omega) = i \left( r_{NI} + \frac{t_{NI}^2 r_{NE} e^{-i2 \frac{\omega_0 + n\Omega}{c} L}}{1 + r_{NI} r_{NE} e^{-i2 \frac{\omega_0 + n\Omega}{c} L}} \right) \psi_{in}(\omega_0 + n\Omega) \quad (3.11)$$

avec l'indice  $n = -1, 0$  ou  $1$ , identifiant les BL et la porteuse, et  $L$  la longueur de la cavité Fabry-Perot.

À partir de la relation 3.11, nous pouvons définir la réflectivité complexe de la cavité Fabry-Perot :

$$\psi_{B1p}(\omega_0 + n\Omega) = i \mathcal{R}(\omega_0 + n\Omega) \psi_{in}(\omega_0 + n\Omega) \quad (3.12)$$

avec :

$$\mathcal{R}(\omega_0 + n\Omega) = \frac{r_{NI} + (1 - p_{NI}) r_{NE} e^{-i2 \frac{\omega_0 + n\Omega}{c} L}}{1 + r_{NI} r_{NE} e^{-i2 \frac{\omega_0 + n\Omega}{c} L}} \quad (3.13)$$

Ainsi, le signal Pound Drever devient :

$$\begin{pmatrix} S_{\text{phase}} \\ S_{\text{quadrature}} \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} Re \\ -Im \end{pmatrix} \left[ \mathcal{R}^*(\omega_0) \mathcal{R}(\omega_0 + \Omega) - \mathcal{R}(\omega_0) \mathcal{R}^*(\omega_0 - \Omega) \right] \quad (3.14)$$

avec  $\kappa$  un terme relatif aux différents éléments optiques placés entre le faisceau réfléchi par la cavité Fabry-Perot et le faisceau détecté par la photodiode.

Le signal Pound Drever ne se trouve que sur une phase et s'écrit :

$$S_{\text{PoundDrever}} = 2 J_0 J_1 P_{in} \frac{t_{NI}^2}{(1 - r_{NI} r_{NE})^2} \frac{\omega_0}{c} \delta L \quad (3.15)$$

Ainsi, le signal Pound Drever a la propriété d'être linéaire à proximité de la résonance de la cavité Fabry-Perot. Il est utilisé comme signal d'erreur dans une boucle d'asservissement qui veut maintenir une cavité optique en résonance.

#### Estimation du gain optique

Le gain optique est le coefficient de proportionnalité entre le signal d'erreur et la longueur, soit :

$$S_{\text{PoundDrever}} = G_{\text{FP}}^{\text{Optique}} \delta L$$

$$\text{avec } G_{\text{FP}}^{\text{Optique}} = 2 J_0 J_1 P_{in} \frac{t_{NI}^2}{(1 - r_{NI} r_{NE})^2} \frac{\omega_0}{c}.$$

Le terme  $G_{\text{FP}} = \frac{t_{NI}^2}{(1 - r_{NI} r_{NE})^2}$  est le gain de la cavité Fabry-Perot pour la porteuse. À partir de cette expression, nous pouvons réécrire la relation 3.15 comme suit :

$$S_{\text{PoundDrever}} = 2 J_0 J_1 P_{in} G_{\text{FP}} \frac{\omega_0}{c} \delta L \quad (3.16)$$

Le gain de la cavité Fabry-Perot est défini par le rapport entre la puissance intracavité et la puissance entrant dans la cavité, alors :

$$G_{\text{FP}} = \frac{|\psi_{sto}(\omega_0)|^2}{J_0^2 |\psi_{in}|^2} \quad (3.17)$$

la relation 3.16 se réécrit :

$$S_{\text{PoundDrever}} = 2 \frac{J_1}{J_0} |\psi_{sto}(\omega_0)|^2 \frac{\omega_0}{c} \delta L \quad (3.18)$$

Nous avons d'autre part :

$$\frac{\psi_{in}(\omega_0 + \Omega)}{\psi_{in}(\omega_0)} = \frac{J_1}{J_0} \quad (3.19)$$

la relation 3.18 devient :

$$S_{\text{PoundDrever}} = 2 \frac{\psi_{in}(\omega_0 + \Omega)}{\psi_{in}(\omega_0)} |\psi_{sto}(\omega_0)|^2 \frac{\omega_0}{c} \delta L \quad (3.20)$$

Le gain optique  $G_{\text{FP}}^{\text{Optique}}$  de la cavité Fabry-Perot est donné par :

$$G_{\text{FP}}^{\text{Optique}} = 2 \frac{\omega_0}{c} \frac{\psi_{in}(\omega_0 + \Omega)}{\psi_{in}(\omega_0)} |\psi_{sto}(\omega_0)|^2 \quad (3.21)$$

Ecrit de cette façon, le gain optique peut être estimé à partir de quantités mesurables expérimentalement. Nous allons généraliser cette expression lorsque nous évaluerons la matrice optique de Virgo (voir chapitre 5).

### 3.2.2 Technique de la linéarisation des signaux d'erreurs

Pour faciliter l'acquisition du lock de la cavité Fabry-Perot, nous utilisons la technique de la linéarisation. Cette technique nous permet d'élargir la zone linéaire du signal d'erreur, nous pouvons donc agir plus longtemps sur le système. Ceci a également pour vertu de rendre le signal d'erreur moins sensible aux variations de puissance dans la cavité Fabry-Perot.

De manière générale, la puissance que mesure la photodiode B7 (voir figure 3.8) en DC est la somme des contributions de la porteuse et des bandes latérales. Puisque la porteuse est résonante et les BL antirésonantes dans la cavité Fabry-Perot, nous avons :

$$P_{B7} = t_{NE}^2 | \psi_{sto}(\omega_0) |^2 \quad (3.22)$$

La puissance transmise par la cavité Fabry-Perot est donnée de manière plus complète par :

$$P_{B7} = \frac{(t_{NI} t_{NE})^2}{(1 - r_{NI} r_{NE})^2} \frac{1}{1 - \frac{4 r_{NI} r_{NE}}{(1 - r_{NI} r_{NE})^2} \sin^2(\frac{\omega_0}{c} \delta L)} P_{in} \quad (3.23)$$

En reprenant la relation 3.18, nous avons :

$$S_{\text{PoundDrever}} = 2 \frac{J_1}{J_0} \frac{\omega_0}{c} \frac{P_{B7}}{t_{NE}^2} \delta L \quad (3.24)$$

Le signal d'erreur possède donc une plage linéaire réduite à cause du dénominateur de  $P_{B7}$  qui est en  $\delta L^2$ . Linéariser le signal d'erreur consiste à diviser le signal d'erreur par la puissance en sortie de la cavité Fabry-Perot soit :

$$S_{Lin} = \frac{S_{\text{PoundDrever}}}{P_{B7}} \quad (3.25)$$

d'où :

$$S_{Lin} = 2 \frac{\omega_0}{c} \frac{J_1}{J_0} \frac{1}{t_{NE}^2} \delta L \quad (3.26)$$

### 3.2.3 Les asservissements

#### Principe

Le point essentiel dans la conception d'une boucle d'asservissement est la définition du régulateur qui permet de passer du signal d'erreur à la correction à appliquer. Pour cela, nous abandonnons la représentation temporelle pour travailler dans l'espace de Laplace. La relation entre un signal d'entrée  $x(s)$  et un signal de sortie  $y(s)$  est alors décrite par sa fonction de transfert  $H(s)$  définie par :

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \quad (3.27)$$

$H(s)$  est généralement une fraction rationnelle<sup>6</sup> de la variable  $s$  formée à partir de quatre fonctions de base :

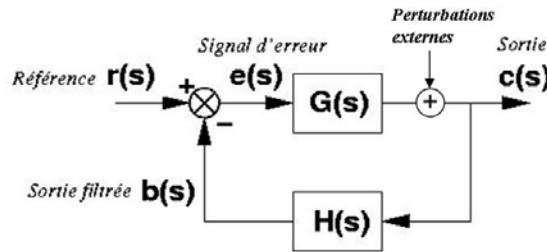
- Les dérivateurs  $H(s) = s + s_0$  de pulsation caractéristique  $\omega_0 = -i s_0$ .
- Les intégrateurs  $H(s) = \frac{1}{s + s_0}$  de pulsation caractéristique  $\omega_0 = -i s_0$ .
- Les filtres du second ordre

$$H(s) = s^2 + \frac{\omega_{\text{res}}}{Q} s + \omega_{\text{res}}^2 ; \text{ Filtre Passe-haut}$$

ou

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_{\text{res}}}{Q} s + \omega_{\text{res}}^2} ; \text{ Filtre Passe-bas}$$

Ces derniers sont caractérisés par leur fréquence de résonance  $\omega_{\text{res}}$  et par leur facteur de qualité  $Q$ .



**FIG. 3.9:** Représentation en bloc du système de rétroaction.  $G(s)$  est la fonction de transfert de la chaîne d'action et  $H(s)$  celle de la chaîne de réaction.  $r(s)$  est le signal qui entre dans la boucle de rétroaction.  $c(s)$  est le signal produit par le système.  $e(s)$  mesure la différence entre le signal de sortie filtré par  $H(s)$ ,  $b(s)$  et le signal d'entrée.

Le dispositif de contrôle le plus utilisé dans l'expérience Virgo est ce que nous appelons un asservissement en boucle fermée : la sortie du système étudié est utilisée pour créer une rétroaction sur l'entrée afin de ramener l'ensemble vers le point de fonctionnement cherché.

---

<sup>6</sup>Les racines du numérateur s'appellent des zéros et celles du dénominateur des pôles.

La position de la résonance d'une cavité optique est caractérisé par un signal Pound Drever nul. La boucle d'asservissement corrige toute déviation par rapport à ce point. Le principe est décrit sur la figure 3.9 sous forme d'un diagramme "en bloc". Les perturbations externes tels que le bruit de fréquence du laser, le bruit sismique ou le mouvement angulaire des miroirs peuvent rendre la boucle d'asservissement instable.

Les boucles d'asservissements n'empêcheront pas la détection de l'onde gravitationnelle. En effet, les asservissements du contrôle longitudinale implementés dans Virgo ont une bande passante inférieurs à la fréquence de l'onde gravitationnelle. Ainsi, l'onde gravitationnelle n'est pas affectée par la boucle d'asservissement [77]. Si maintenant, la bande passante de la boucle d'asservissement comprend le signal gravitationnel, celui-ci se retrouvera sur le signal de correction.

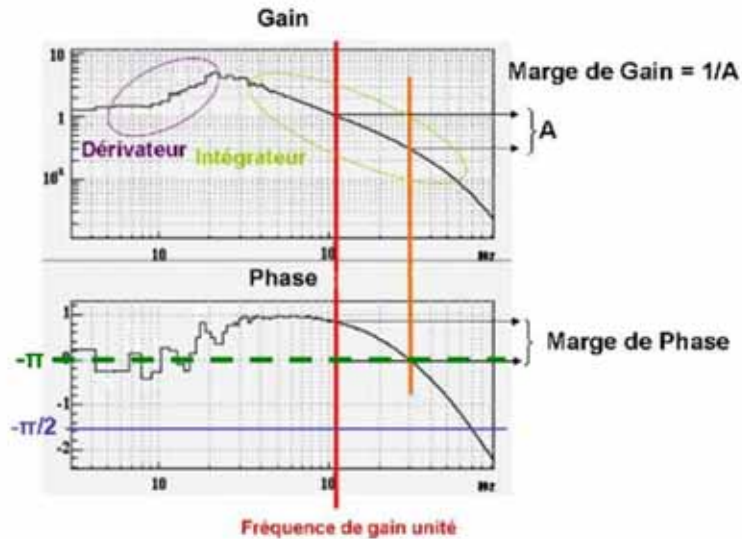
Deux fonctions de transfert définies à partir de ce diagramme permettent l'étude complète de la boucle d'asservissement :

- La fonction de transfert en boucle ouverte :

$$F_{\text{ouverte}}(s) = \frac{b(s)}{r(s)} = G(s) H(s) \quad (3.28)$$

- La fonction de transfert en boucle fermée :

$$F_{\text{fermée}}(s) = \frac{c(s)}{r(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \quad (3.29)$$



**FIG. 3.10:** Exemple de fonction de transfert utilisée pour le contrôle des longueurs. Le filtre est dérivateur à basse fréquence, puis un double pôle le fait décroître en  $1/f$  jusqu'au gain unité. La mesure des marges de phase et de gain est également illustrée.

### Stabilité

Il existe un grand nombre de critères de stabilité. Celui que nous utilisons est généralement le critère de Bode (voir figure 3.10) : le module et la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte  $F_{\text{ouverte}}(s)$  sont représentés en échelle log/log sur des diagrammes de Bode. Nous regardons alors la fréquence  $\omega_1$  pour laquelle  $|F_{\text{ouverte}}(i\omega_1)| = 1$  appelée fréquence de gain unité et nous calculons la marge de phase  $\mathfrak{M}_\phi$ , définie par la différence entre  $\arg[F_{\text{ouverte}}(i\omega_1)]$  et  $-\pi$ .

Pour que la boucle d'asservissement soit stable, nous devons avoir :

$$\mathfrak{M}_\phi > 0 \quad (3.30)$$

De même, nous introduisons la marge de gain  $\mathfrak{M}_G$  définie par :

$$\mathfrak{M}_G = \frac{1}{|F_{\text{ouverte}}(i\omega_2)|} \text{ avec } \omega_2 \text{ tel que } \arg[F_{\text{ouverte}}(i\omega_2)] = -\pi \quad (3.31)$$

Généralement, nous essayons d'avoir :

$$\begin{aligned} 2 &< \mathfrak{M}_G < 6 \\ 30^\circ &< \mathfrak{M}_\phi < 60^\circ \end{aligned}$$

Finalement, une règle pratique de stabilité pour un filtre est d'avoir une pente en  $1/s$  sur le diagramme de Bode au niveau du gain unité.

### Performances

Deux paramètres résument de manière générale les performances d'un filtre :

- le pic de résonance  $M_{\text{res}}$  :

$$M_{\text{res}} = \max_\omega \frac{|F_{\text{fermée}}(i\omega)|}{|F_{\text{fermée}}(0)|} \quad (3.32)$$

- la bande passante  $\omega_{\text{BP}}$  est définie par la relation :

$$\frac{|F_{\text{fermée}}(i\omega_{\text{BP}})|}{|F_{\text{fermée}}(0)|} = -3 \text{ dB} \quad (3.33)$$

$f_{\text{BP}} = \omega_{\text{BP}}/2\pi$  est la fréquence maximale à laquelle la boucle d'asservissement est active. Une boucle d'asservissement dont la bande passante vaut  $f_{\text{BP}}$  sera efficace pour corriger la longueur d'une cavité ( $\delta l$ ) si la vitesse de la cavité est inférieure ou égale à un seuil  $v_{\text{seuil}}$  avec :

$$v_{\text{seuil}} \sim \delta l \times f_{\text{BP}} \quad (3.34)$$

### Principe du dessin du filtre de compensation H(S)

Le signal Pound Drever mesure la variation de la longueur par rapport à la résonance. Le filtre de compensation  $H(s)$  situé dans la chaîne de contrôle a été élaboré en suivant trois principes. Pour commencer, le filtre doit être proportionnel au signal en entrée.

Pour pouvoir arrêter efficacement le système au point de fonctionnement nous devons estimer la vitesse de déplacement de la cavité optique. Pour cela, il est nécessaire de calculer la dérivée du signal d'erreur. C'est le rôle du filtre dérivateur que nous appliquons entre 10 Hz et 800.

Enfin, nous devons utiliser un filtre intégrateur. Celui-ci permet d'accumuler l'erreur sur la longueur à corriger et ainsi de la corriger de manière plus précise. Nous l'appliquons entre 0.01 Hz et 10 Hz.

Ce type de filtre porte le nom de filtre PID<sup>7</sup>.

### 3.2.4 Contrainte sur la vitesse du miroir pour acquérir le lock

La vitesse des miroirs introduit une contrainte pour l'acquisition du lock de la cavité. Deux conditions doivent être satisfaites :

- La bande passante (B) de la boucle d'asservissement : le miroir doit traverser la résonance en un temps plus grand que le temps d'action  $\Delta t$  (inverse de la fréquence de gain unité) de la boucle d'asservissement pour pouvoir agir efficacement dessus :

$$\Delta t \geq \frac{1}{B}$$

La vitesse du miroir est mesurée par le temps mis par celui-ci pour traverser la résonance soit :

$$v_{\text{miroir}} = \frac{d_{\text{résonance}}}{\Delta t} \quad (3.35)$$

Alors, nous devons avoir :

$$v_{\text{miroir}_{\text{max}}} < \frac{\lambda}{2\mathcal{F}} B$$

Maintenant, grâce à la technique de la linéarisation, la largeur du signal d'erreur est élargie d'un facteur  $\alpha \sim 10$ . Donc, la vitesse limite du miroir est maintenant :

$$v_{\text{miroir}_{\text{max}}} < \frac{\lambda}{2\mathcal{F}} \alpha B$$

Pour Virgo,  $B \sim 100$  Hz,  $\mathcal{F} \sim 50$ ,  $\lambda = 1.064\mu$  m et  $\alpha = 10$  alors  $v_{\text{miroir}_{\text{max}}} < 33\mu$  m/s.

- La force maximale applicable sur les miroirs : selon le principe fondamental de la dynamique nous avons :

$$F_{\text{max}} = m_{\text{miroir}} \frac{v_{\text{miroir}}}{t_{\text{résonance}}} \text{ avec } t_{\text{résonance}} = \frac{\lambda/2\mathcal{F}}{v_{\text{miroir}}}$$

Et par conséquent :

$$v_{\text{miroir}_{\text{max}}} = \sqrt{\frac{1}{m_{\text{miroir}}} F_{\text{max}} \frac{\lambda}{2\mathcal{F}}}$$

En considérant l'effet de la linéarisation, nous avons alors :

$$v_{\text{miroir}_{\text{max}}} = \sqrt{\frac{1}{m_{\text{miroir}}} F_{\text{max}} \alpha \frac{\lambda}{2\mathcal{F}}}$$

---

<sup>7</sup>Proportionnel Intégrateur Dérivateur.

### 3.3. L'OUTIL DE SIMULATION SIESTA

Dans le cas de Virgo, la force maximale applicable par les bobines est de l'ordre de 40 mN et la masse des miroirs est de 30 kg. Ainsi, la limite est donnée par :

$$v_{\text{miroir}_{max}} < 10 \mu\text{m/s} \quad (3.36)$$

Ainsi, avec la technique de linéarisation du signal d'erreur, nous n'avons pas de contrainte introduite par la vitesse des miroirs. En effet, les contrôles locaux permettent de la maintenir proche de  $1 \mu\text{m/s}$ .

## 3.3 L'outil de simulation SIESTA

Virgo est un détecteur complexe : optique, mécanique (super atténuateur), électronique... Dans le cadre du travail sur l'acquisition du lock, tous ces aspects sont combinés. Ainsi, une simulation qui permet d'intégrer tous ces aspects est indispensable. La simulation SIESTA<sup>8</sup>[66] est utilisé pour mettre en place les algorithmes de lock de l'interféromètre et comprendre le comportement optique du détecteur.

### 3.3.1 La structure générale

SIESTA est une simulation temporelle. Elle permet de reproduire les effets dynamiques, les boucles d'asservissement, de prendre en compte les effets non linéaires dans la réponse optique du détecteur ou dans l'électronique. La figure 3.11 illustre les différents domaines couverts par cette simulation.

Nous allons présenter dans ce qui suit les modules employés dans le cadre du travail sur le lock de Virgo.

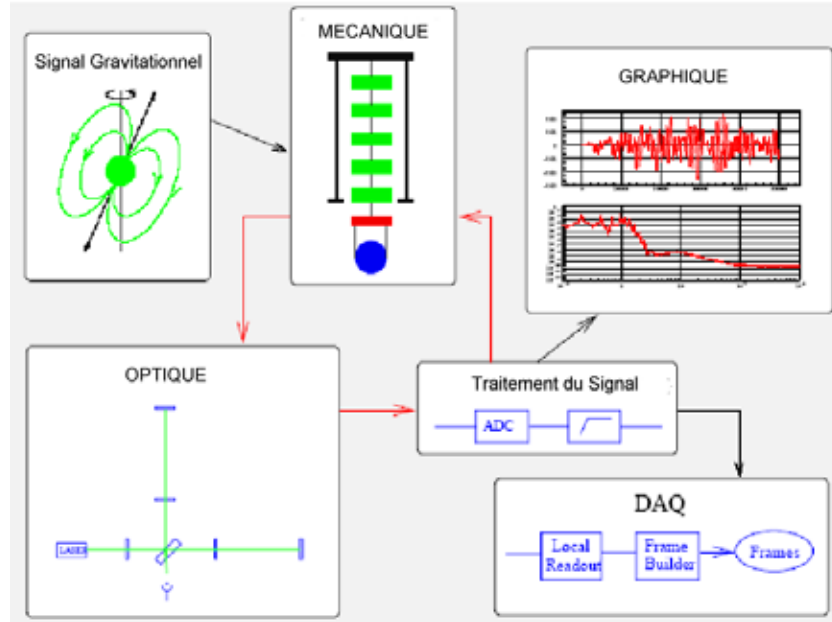


FIG. 3.11: Illustration des différentes thématiques traitées dans SIESTA.

---

<sup>8</sup>Simulation of Interferometric Experiments Sensitive To gravitational waves.

---



### 3.3.2 Module de simulation Mécanique

Le but de la simulation mécanique est de délivrer des outils qui permettent de décrire le mouvement des miroirs suspendus. Ceci implique de simuler les bruits externes comme le bruit sismique, les bruits internes comme les bruits thermiques mais également la réponse mécanique du système miroir + suspension. La figure 3.12 donne un aperçu de ce que nous pouvons simuler avec le module mécanique.

Simuler le comportement d'un super atténuateur sur 1 seconde avec une horloge à 10 kHz nécessite de l'ordre de 10 s sur une machine standard. Pour les simulations sur l'acquisition du lock, nous avons utilisé un modèle simple de suspension (pendule simple) de tel sorte à pouvoir simuler dans un temps raisonnable des durées allant jusqu'à 1000 s.

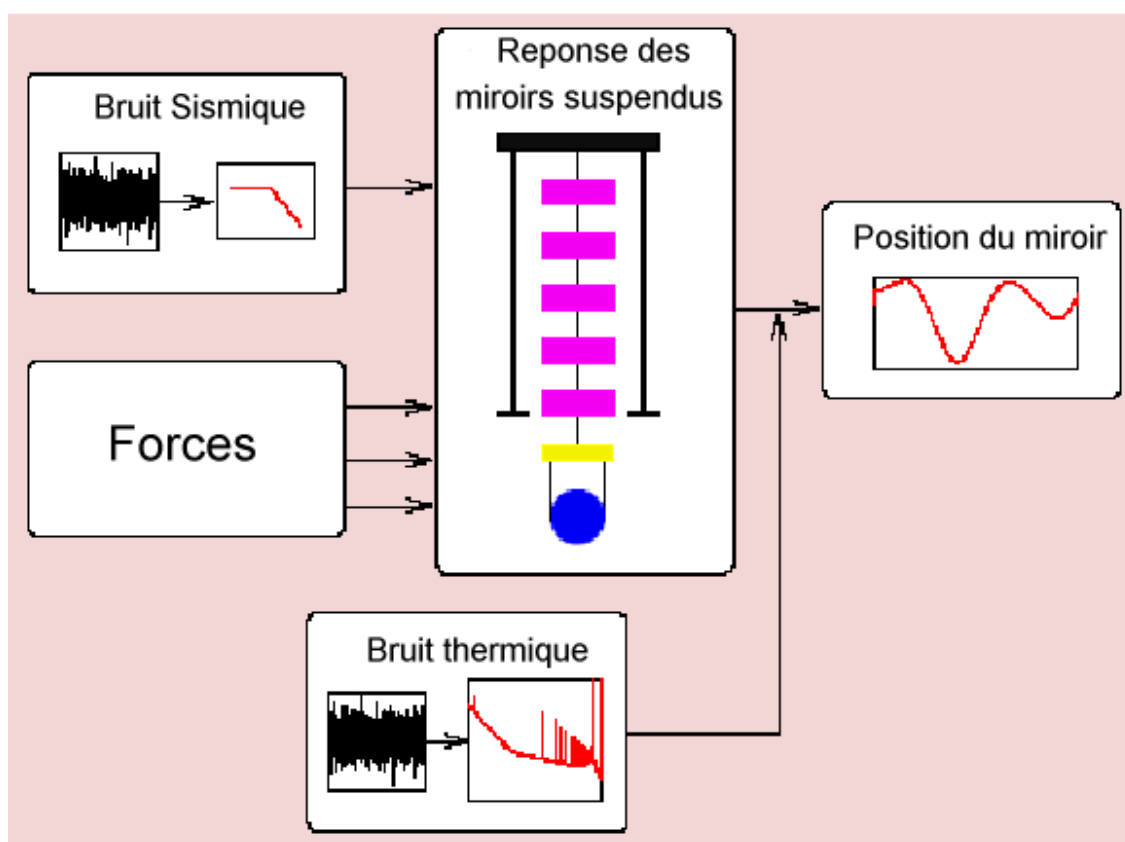


FIG. 3.12: Vue schématique de l'organisation du module de simulation mécanique.

### 3.3.3 Module de simulation Optique

Ce module est riche en ce qui concerne les configurations optiques que nous pouvons simuler et les méthodes utilisées pour la propagation des champs. Nous pouvons utiliser des modèles prédéfinis de configuration optique (cavité Fabry-Perot, CITF ou Virgo) ou en créer de nouvelles en juxtaposant des miroirs de manière individuelle les uns par rapport aux autres.

Les simulations optiques diffèrent selon qu'elles soient dynamiques, statiques et par les représentations des champs employés.

#### Simulation statique et dynamique

Certains des modèles utilisent une approximation quasi-statique dans le sens où ils calculent les champs à l'équilibre. D'autres modèles, calculent les champs de manière séquentielle (calcul de la valeur d'un champ au niveau d'un miroir à partir de la valeur sur le miroir précédent aux temps antérieurs). Ces modèles sont appelés dynamiques.

#### Simulation modale ou non modale

Différentes représentations des champs ont été implémentées. Le modèle le plus simple utilise une représentation des champs en onde plane. Des modèles plus complexes permettent d'utiliser une décomposition sur la base des modes d'Hermitte-Gauss (simulation modale) du champ (voir Annexe A). Pour le travail concernant l'acquisition du lock, nous avons tout d'abord employé des représentations simples de l'interféromètre. Au fur et à mesure du travail, pour prendre en compte des effets de plus en plus fins, les simulations employées ont été plus complexes pour gagner en réalisme.

Dans la partie qui va suivre, nous allons décrire comment techniquement nous acquérons le lock de l'interféromètre.

## 3.4 Aspect technique du Locking

### 3.4.1 La boucle de contrôle et ses acteurs

La chaîne de contrôle de l'interféromètre Virgo pour le Locking consiste en la combinaison des éléments suivants : photodiodes, Contrôle Global (voir page 91), suspensions. La figure 3.13 illustre les différents systèmes dévolus à l'Alignement et au Locking de l'interféromètre. Nous avons plus haut décrit le fonctionnement et la disposition des différentes photodiodes (voir la partie 3.1.5. page 70) dont les signaux sont utilisés pour le lock de Virgo. Nous allons dans ce qui suit présenter le rôle assumé par le système électronique associé aux suspensions.

### 3.4.2 Agir sur les miroirs

Les suspensions [19, 41] reçoivent les signaux de corrections émis par le Contrôle Global pour le Locking et pour l'Alignement. Les forces appliquées aux miroirs sont délivrées par un système aimants/bobines. En agissant à partir des bobines faisant face à des aimants collés sur le substrat et la marionnette, nous pouvons appliquer des corrections sur les différents degrés de liberté à contrôler.

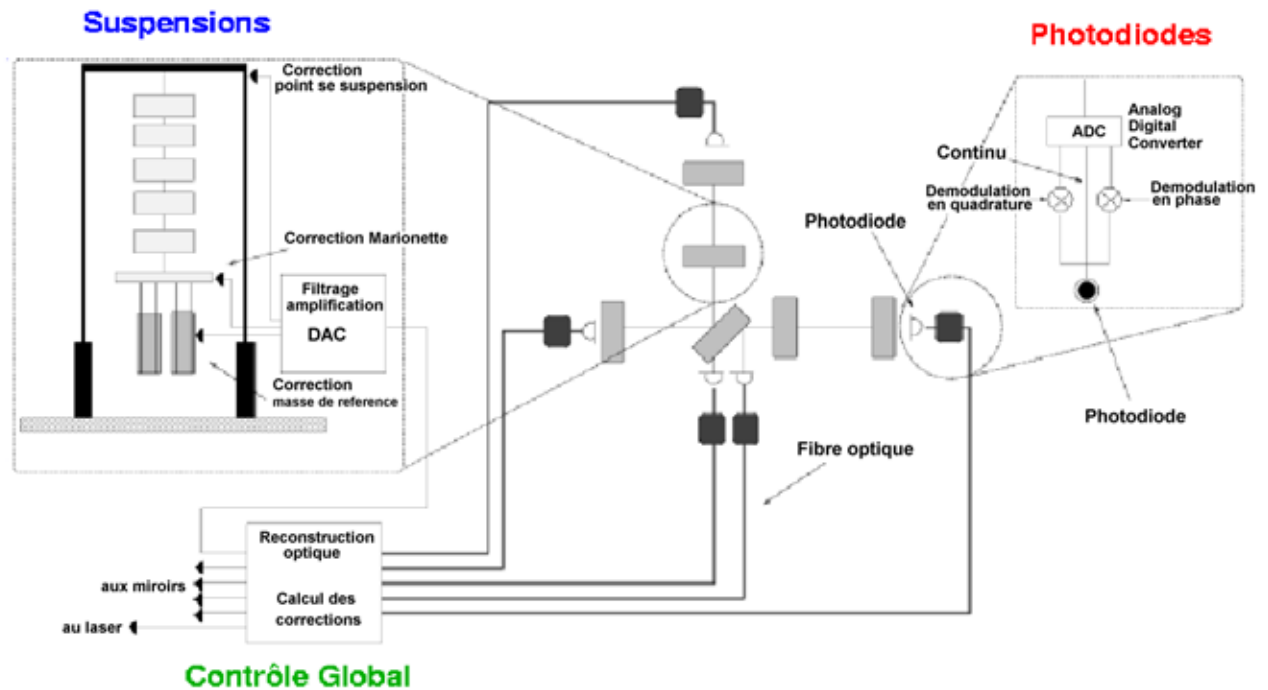


FIG. 3.13: Schéma de la chaîne de contrôle de l'expérience Virgo : les signaux enregistrés par les photodiodes sont transmis au Contrôle Global qui calcule alors des corrections (longitudinales et angulaires) transmises ensuite aux suspensions pour emmener et garder l'interféromètre à son point de fonctionnement.

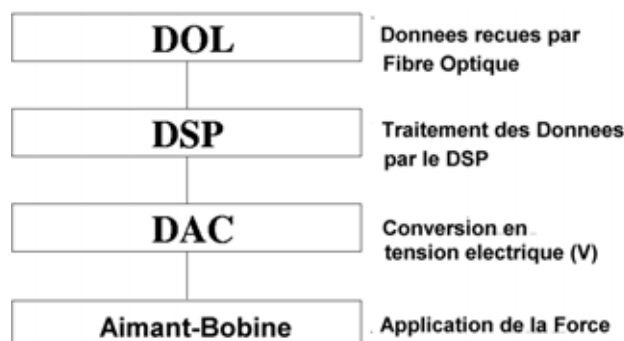


FIG. 3.14: Le système de traitement électronique associé aux suspensions.

### 3.4. ASPECT TECHNIQUE DU LOCKING

---

La figure 3.2 de la page 68 détaille la structure marionnette, miroir et masse de référence ; nous pouvons voir en particulier les aimants permettant d'agir sur la marionnette. Le système électronique associé (voir figure 3.14) est composé par :

- Le DSP<sup>9</sup>.

La carte DSP est basé sur un processeur Motorola DSP96002. Pour le Locking et l'Alignement, ses principales tâches sont :

- lire les demandes de déplacement envoyées par le Contrôle Global ;
  - lire les demandes de déplacement (mises à jour à 50 Hz) envoyées par les contrôles locaux ;
  - filtrer les signaux de corrections si nécessaire ;
  - séparer la force en trois points d'application : le pendule inversé, la marionnette et la masse de référence. Le pendule inversé est utilisé pour les grands déplacements (de l'ordre du cm) à basse fréquence ( $f < 100$  mHz). La marionnette se charge du déplacement (longitudinale et tilt) entre 100 mHz et 4 Hz. À haute fréquence et uniquement pour le contrôle longitudinal, la masse de référence est utilisée. Cette séparation est nécessaire en raison de la grande dynamique des corrections à appliquer et pour respecter un niveau de bruit faible introduit par les boucles de contrôle.
- les DAC<sup>10</sup>.  
Il s'agit d'un DAC de 20 bits basé sur une puce Analog Devices AD1862. Il est capable de délivrer une tension entre -10 V et +10 V.
  - Le système Aimants/Bobines.

Masse de référence				
	N(W)I, N(W)E		PR	BS
	Haut gain	Bas gain		
Tension maximale applicable aux DAC en valeur Pic-Pic (V)	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$	$\pm 10$
Courant maximal (A)	2	0.08	2	2
Fréquence de coupure de la bobine (Hz)	500	5000	500	500
Déplacement longitudinal maximal ( $\mu\text{m}$ )	130	5	150	150

**TAB. 3.1:** Tableau récapitulatif des caractéristiques du système Bobines/Aimants sur les miroirs à partir de la masse de référence. Les valeurs concernant PR et BS sont mal connues.

---

<sup>9</sup>Digital Signal Processing.

<sup>10</sup>Digital to Analog Converter.

---

Marionette			
	N(W)I, N(W)E	PR	BS
Tension maximale applicable aux DAC en valeur Pic-Pic (V)	$\pm 20$	$\pm 20$	$\pm 20$
Courant maximal (A)	2	2	2
Fréquence de coupure de la bobine (Hz)	15	15	15
Déplacement longitudinal maximal ( $\mu\text{m}$ )	30	150	150
Déplacement angulaire maximal ( $\mu\text{rad}$ )	$1000 (\theta_x)$ $1.5 \cdot 10^5 (\theta_y)$	$1000 (\theta_x)$ $1.5 \cdot 10^5 (\theta_y)$	$1000 (\theta_x)$ $1.5 \cdot 10^5 (\theta_y)$

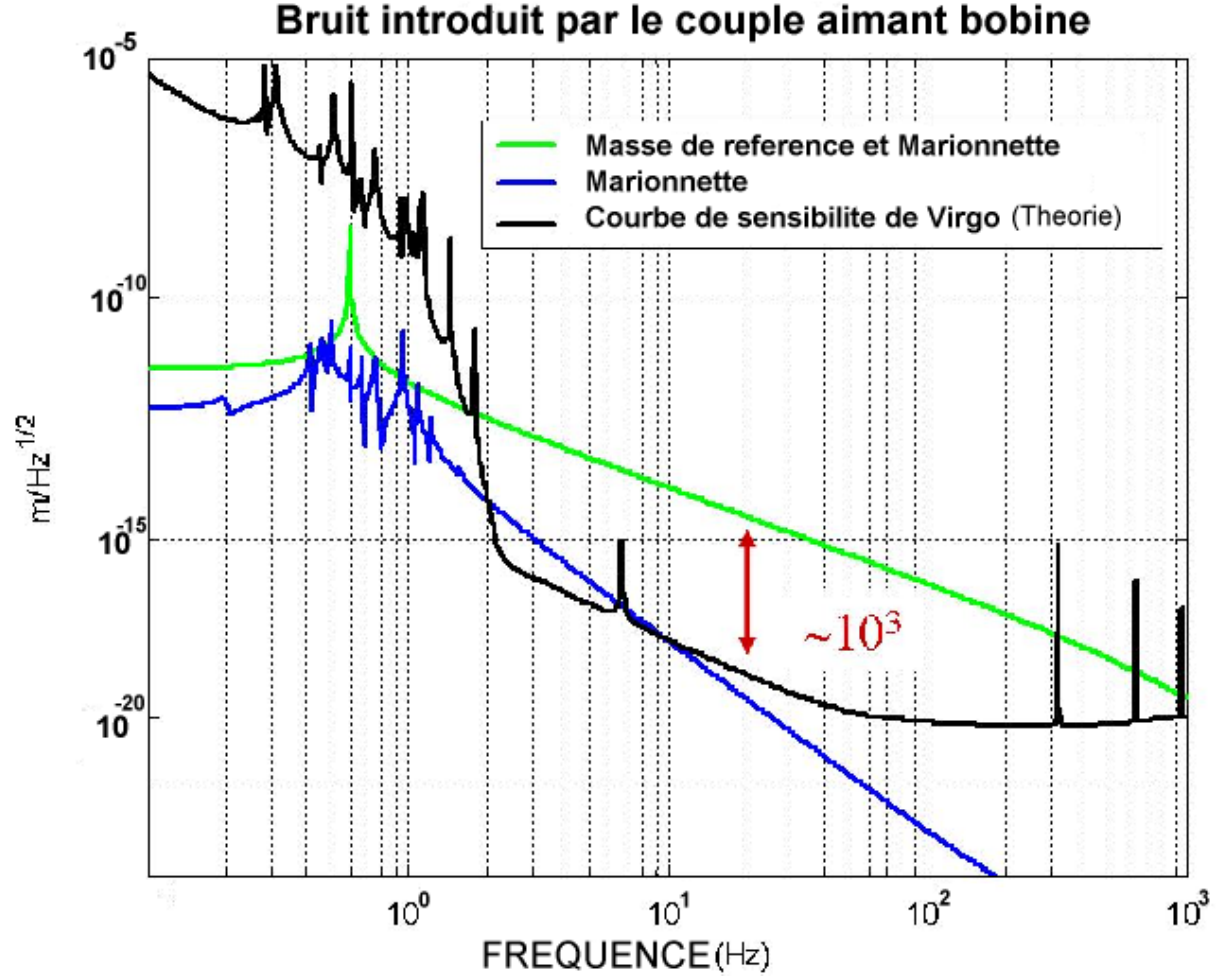
**TAB. 3.2:** Tableau récapitulatif des caractéristiques des bobines placés sur les jambes du filtre 7 faisant face aux aimants collés sur la marionette. Les valeurs concernant PR et BS sont mal connues.

Le système Aimant/Bobine permet d'appliquer une force sur le miroir et/ou sur la marionette. Les tableaux 3.1 et 3.2 font le bilan des forces que nous pouvons appliquer sur les miroirs à partir de la masse de référence et de la marionette. Concernant la masse de référence, nous avons deux types de générateur de courant qui peuvent être employés. Le dispositif à haut gain est utilisé lors de l'acquisition du lock car il permet d'appliquer une force plus grande sur les miroirs. Par la suite, nous passons à un dispositif à bas gain permettant de diminuer le bruit de la boucle d'asservissement. Les valeurs présentés dans les tableaux 3.1 et 3.2 sont celles employées actuellement pour le contrôle longitudinale des cavités optiques. Dans le futur certains paramètres vont évoluer de tels sortes à respecter les spécifications établies pour atteindre la sensibilité nominale de Virgo. Par exemple, le déplacement longitudinal à partir de la masse de référence sera de 10 nm.

Après avoir acquis le lock de Virgo, une partie des corrections seront appliquées au niveau de la marionette et au niveau du pendule inversé. Cette distribution des forces porte le nom de contrôle hiérarchique. Pour le moment, le couple aimant-bobine employé introduit un bruit tellement important qu'il dominerait dans la courbe de sensibilité de Virgo (voir figure 3.15).

Pour le Locking, il a fallu déterminer les combinaisons d'actions sur les différents aimants associés à chaque degré de liberté. Pour chaque miroir, quatres couples aimants-bobines sont disposés. Cependant, seuls deux couples sont utilisés, ceux placés aux extrémités de l'axe vertical des miroirs.

Dans le cas de la séparatrice, les couples aimants-bobines sont disposés en diagonale. Une étude a donc été faite pour savoir si nous avons un couplage entre les degrés de liberté longitudinaux et angulaires des miroirs lorsque nous appliquons une force sur le miroir. Pour cette mesure, nous appliquons sur les miroirs à partir de la masse de référence une force équivalente à celle du Locking. Puis, nous évaluons l'excitation des degrés angulaires des miroirs. Pour cela, les données mesurées avec le miroir NE sont utilisées comme références. Trois types de tests ont été effectués.



**FIG. 3.15:** Contribution du bruit introduit par le couple aimant-bobine à la courbe de sensibilité de Virgo.

Nous avons tout d'abord laissé évoluer librement les miroirs (voir figure 3.16). Dans un deuxième temps, nous avons appliqué une force équivalente au Locking sur le miroir et fermé la boucle d'asservissement des contrôles locaux au niveau de la marionnette pour contrôler l'angle  $\theta_x$  (voir figure 3.17).

La troisième étude a consisté à fermer la boucle d'asservissement des contrôles locaux au niveau de la marionnette et de la masse de référence (voir figure 3.18) en appliquant une force équivalente à celle du Locking sur le miroir.

À partir de cette étude, nous constatons que les signaux en  $\theta_x$  pour les miroirs BS et NE sont comparables. L'étude a montrée que la disposition des aimants sur le miroir BS n'excitait pas les degrés de liberté angulaires des miroirs.

Après avoir passé en revue les acteurs de la boucle de contrôle, nous allons nous intéresser au rôle du Contrôle Global, central dans toute l'activité permettant d'amener l'interféromètre à son point de fonctionnement.

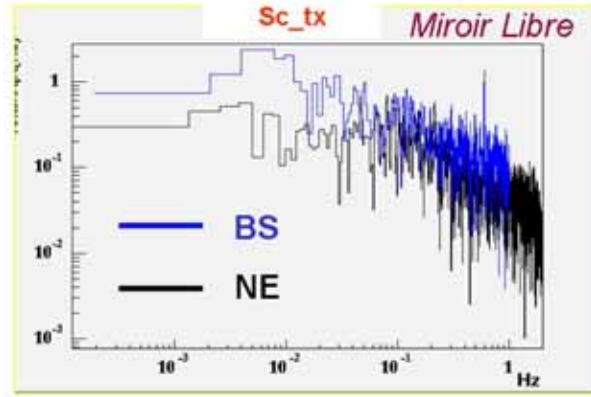


FIG. 3.16: Comparaison entre les miroirs NE et BS du signal sensible au mouvement  $\theta_x$  des miroirs en mouvement libre.

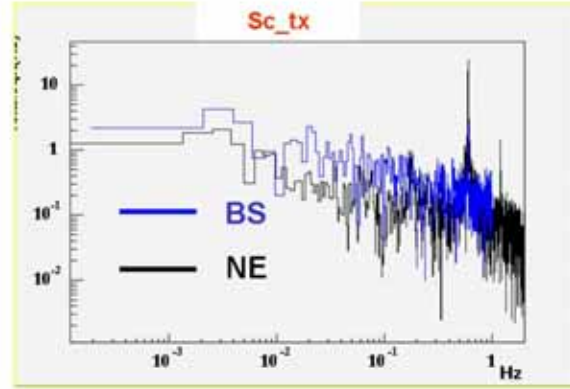


FIG. 3.17: Comparaison entre les miroirs NE et BS du signal sensible au mouvement en  $\theta_x$  des miroirs, en fermant la boucle au niveau de la marionnette.

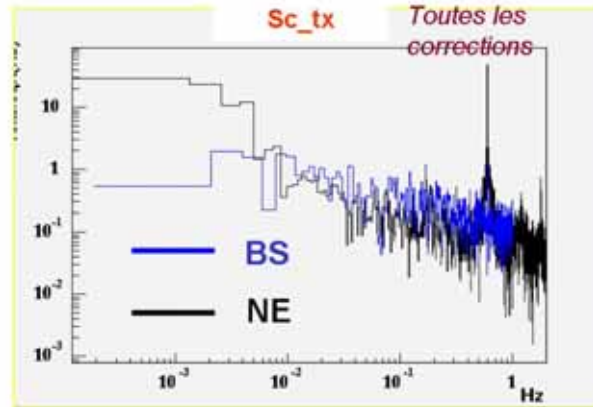


FIG. 3.18: Comparaison entre les miroirs NE et BS du signal sensible au mouvement en  $\theta_x$  des miroirs, en fermant la boucle au niveau de la marionnette et de la masse de référence.

### 3.4.3 Le Contrôle Global

Le Contrôle Global est un système hardware et software dont le but est à partir d'une reconstruction optique (Locking et Alignement) d'emmener et de maintenir l'interféromètre à son point de fonctionnement. Cette partie présente en particulier le rôle que tient le Contrôle Global dans le Locking de Virgo.

#### Le Locking

La boucle d'asservissement pour le Locking fonctionne à 10 kHz. La contrainte majeure provient du fait que le Contrôle Global doit être parfaitement synchronisé à cette fréquence. Tout jitter ou délai peut rendre la boucle d'asservissement instable. Donc, toutes les 100  $\mu$ s, le Contrôle Global effectue le même type d'opérations.

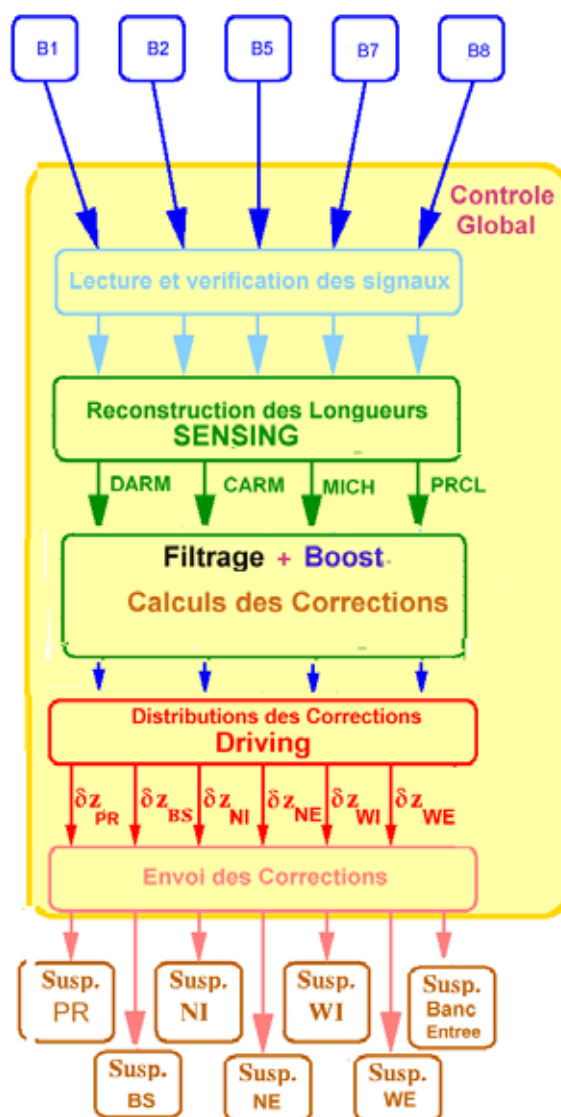


FIG. 3.19: Logique du locking de Virgo.



**Lengths Sensing**

Current Algorithm: No Available Information

List of Possible Algorithms

1 : Locking\_Half

View Selection
Activate Selection
Onfly Changes

**Lengths Filtering**

Current Algorithm: No Available Information

List of Possible Algorithms

1 : Locking\_Half  
2 : Locking\_Half\_Boost  
3 : Locking\_Half\_Boost\_plus

View Selection
Activate Selection
Onfly Changes

**Filtering Boost**

Current Algorithm: No Available Information

List of Possible Algorithms

1 : Locking\_Half\_Boost

View Selection
Activate Selection
Onfly Changes

**Mirror Driving**

Current Algorithm: No Available Information

List of Possible Algorithms

1 : Locking\_Half  
2 : Locking\_Half

View Selection
Activate Selection
Onfly Changes

Activate All Selections

Close

FIG. 3.20: Fenêtre graphique qui présente les algorithmes utilisables par chacune des parties Sensing, Filtering, Boost et Driving.

L'algorithme de lock se compose de 4 parties (voir figure 3.19 et 3.20) :

- sensing : il reconstruit les longueurs caractéristiques des cavités optiques à contrôler (4 pour Virgo) à partir des signaux d'erreur et applique si nécessaire la technique de la linéarisation. Les conditions de seuils pour activer la stabilisation de fréquence du laser sont aussi évaluées ;
- filtering : il applique dans le domaine temporel les filtres de compensation pour une question de stabilité et de précision de la boucle d'asservissement sur les longueurs calculées par la partie Sensing ;
- boost : cette partie est uniquement utilisée après l'acquisition du lock. Il permet d'appliquer des filtres intégrateurs pour éliminer la partie en DC du signal d'erreur ;
- driving : les différentes corrections calculées sont distribuées sur les miroirs concernés selon la matrice de répartition définie par l'utilisateur.

Cette décomposition de l'algorithme en 4 morceaux a été choisie pour sa flexibilité ainsi que pour la possibilité de travailler sur différents algorithmes partageant des parties communes. Par exemple, il permet de changer au vol la procédure de reconstruction des longueurs en gardant les mêmes filtres.

#### **L'Alignement**

La boucle d'asservissement de l'Alignement fonctionne à 500 Hz et est semblable à celle du Locking. Après l'accès aux 80 signaux produits par les photodiodes à quadrant utilisées par l'Alignement, le Contrôle Global reconstruit les angles en utilisant une minimisation du  $\chi^2$  (avec un modèle linéaire) ou une inversion de matrice. Alors, les corrections sont envoyées vers les différentes suspensions et le banc d'entrée.

À cause de la configuration hardware, les corrections d'alignements sont envoyées avec les corrections longitudinales à la fréquence de la boucle d'asservissement du Locking (10 kHz) mais sont rafraîchies à la fréquence de fonctionnement de l'Alignement (500 Hz).

#### **Le flux de données**

Tous les formats de données entre le Contrôle Global et les autres sous systèmes sont décrits de manière complète dans la référence [65].

Pour résumer, chaque photodiode envoie la composante DC et le signal démodulé. Pour ce qui concerne les photodiodes à quadrant, le Contrôle Global reçoit le signal DC de chaque quadrant et le signal en phase et en quadrature des différences entre les signaux verticaux et horizontaux. Nous avons deux photodiodes à quadrants par faisceau. Le Contrôle Global doit ainsi gérer un flux important de données en entrée et en sortie pour les applications Locking et Alignement (voir tableau 3.3).

Le Contrôle Global envoie à chaque suspension les corrections longitudinales et angulaires. Une copie de toutes les corrections calculées par le Contrôle Global est envoyée au système d'acquisition de données (Frame Builder).

	Pour le Locking		Pour l'Alignement
B1 (premier groupe de 8 photodiodes )	3 + 1 (L)	Q2,Q5	48 + 1 (L)
Signal cavité de référence (IB) B2 et B2_3Ω	7 + 1 (L)	Q7 ou Q8	16 + 1 (L)
B5, B5_2Ω	5 + 1 (L)	Frame Builder	13 + 2 (E)
B7 ou B8	2 + 1 (L)		
Suspension (x6)	3 + 1 (E)	Total	83 (L), 15 (E)
Banc d'entrée	3 + 1 (E)		
Frame Builder	9 + 2 (E)		
Total	24 (L), 39 (E)		

**TAB. 3.3:** Le flux de données dans le Contrôle Global.

Les mots de contrôle sont après le signe +, (L) signifie lecture et (E) écriture. Le signal B2\_3Ω est le signal obtenu après démodulation à trois fois la fréquence de modulation du signal réfléchi par l'interféromètre, et le signal à B5\_2Ω est celui obtenu après démodulation à deux fois la fréquence de modulation du signal B5 (signal réfléchi par la deuxième face de la séparatrice).

### Description technique : un choix d'architecture

Ce paragraphe vise à détailler l'architecture du Contrôle Global et à la motiver en fonction des contraintes introduites par le fonctionnement des boucles d'asservissement : Locking à 10 kHz et Alignement à 500 Hz.

#### *L'environnement Hardware*

La collaboration Virgo a décidé d'utiliser les standards VME et VSB [55] pour les cartes dédiées au système on-line.

Le CPU standard pour Virgo est le RIO8062 de CES [56], basée sur le processeur PowerPC 604 de Motorola. Cette carte a été choisie pour son bon temps de réponse aux interruptions et sa capacité de transfert en bloc sur les bus VME et VSB [57]. Pour les applications en temps réel, le système d'exploitation utilisé est LynxOS [58].

Les différents sous-systèmes de Virgo (Lecture des photodiodes, Suspensions, Acquisition de Données, Contrôle Global) échangent leurs données à travers des fibres optiques par l'utilisation d'une carte spécifique appelée DOL<sup>11</sup>[59].

La synchronisation de tous les sous-systèmes de Virgo est effectuée grâce à une horloge maître (dérivée du système GPS) qui donne une référence aux cartes Timing situées dans les différents châssis [60].

#### *L'architecture Hardware*

Le hardware du Contrôle Global est composé de trois éléments (voir figure 3.21) : un châssis qui abrite les cartes électroniques dédiées à la boucle d'asservissement du Locking, un deuxième châssis pour l'Alignement et une station de travail dédiée au Superviseur (voir partie 3.4.3) qui permet de gérer le fonctionnement du Contrôle Global.

<sup>11</sup>Digital Optical Link.

### 3.4. ASPECT TECHNIQUE DU LOCKING

---

Lors de la conception du système nous nous sommes efforcés à satisfaire trois conditions pour assurer un fonctionnement robuste du Contrôle Global :

- séparer les fonctions du Contrôle Global entre différents programmes et plusieurs CPU les plus indépendants possibles ;
- isoler la boucle la plus rapide (celle en charge du contrôle longitudinal à 10 kHz) pour réduire au maximum les perturbations extérieures ;
- pouvoir faire évoluer facilement les différents composants du système.

La boucle d'asservissement du Locking fonctionne à 10 kHz. Le cycle (acquisition, traitement et envoi des corrections) doit donc se faire en moins de 100  $\mu$ s. En utilisant la norme hardware de Virgo, il n'était pas possible de répondre à cette contrainte. Après optimisation des pilotes des hardwares commerciaux et fabrication d'une carte dédiée [62], la spécification a pu être satisfaite.

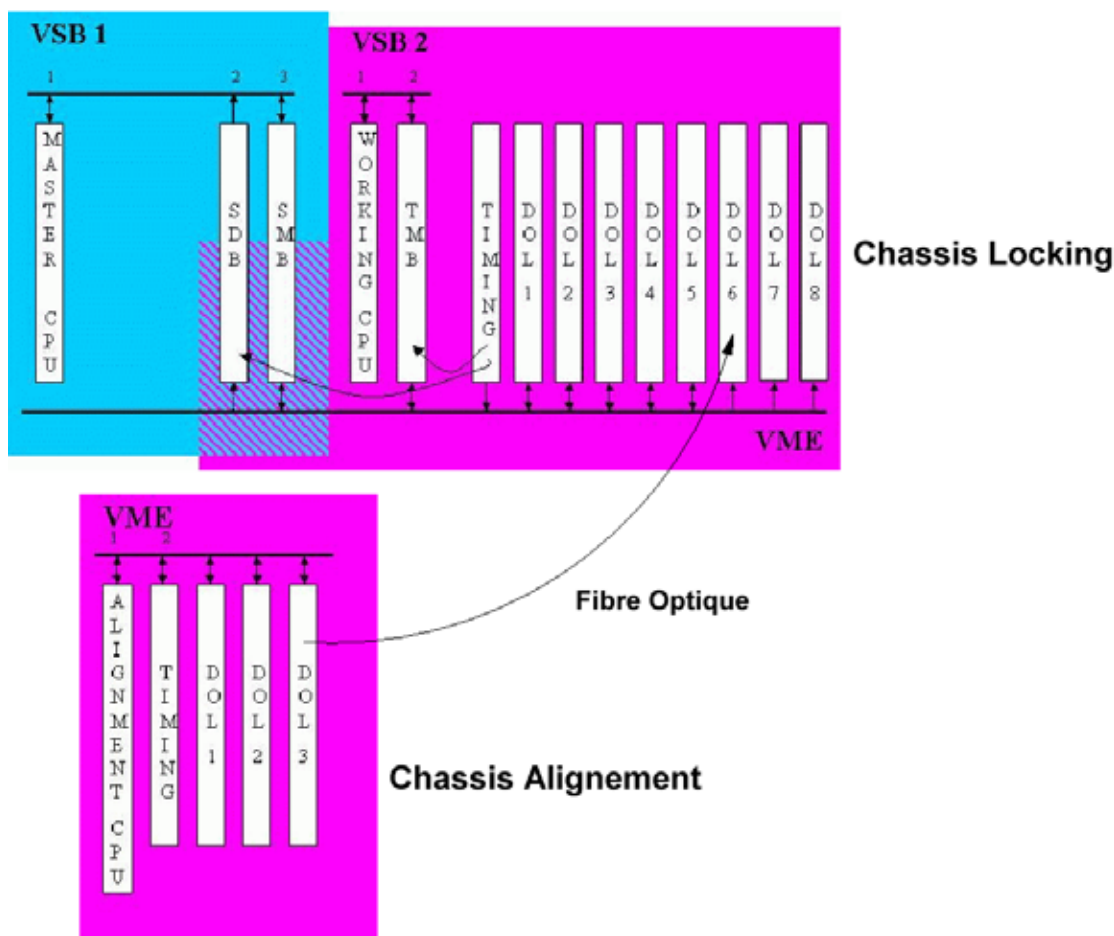


FIG. 3.21: Vue schématique du contenu électronique des chassis du Contrôle Global.

## Développements logiciels

Cette présentation permettra de mettre en évidence les principaux concepts des logiciels développés autour du Contrôle Global.

### *Des protocoles généraux*

Tous les logiciels écrits pour Virgo sont amenés à évoluer. Pour éviter tout conflit avec des versions antérieures, deux outils permettent la gestion de la hiérarchie des versions, des compatibilités ou des conflits avec les programmes extérieurs :

- CVS [63] archive les versions successives d'un ensemble de programmes à un seul endroit. Chaque utilisateur a accès aux sources et peut gérer la compatibilité des codes dans le cas de développements parallèles ;
- CMT (Configuration Management Tool) [64] s'occupe de gérer les dépendances entre plusieurs programmes en tenant compte des problèmes de priorité éventuels entre versions.

Décrivons maintenant plus en détail les logiciels dédiés au fonctionnement du Contrôle Global.

### *Le software du Contrôle Global*

Les applications on-line de Virgo sont construits sur le schéma Client-Serveur.

- Le serveur : un serveur est un programme qui réalise une action sur les composants hardware du système : lecture, écriture, traitement des données...
- Le client : un client sert d'interface (graphique le plus souvent) entre un serveur et un opérateur. À un même serveur, peuvent se connecter plusieurs clients (par exemple l'un fonctionnant au LAL et l'autre à Cascina) ce qui nécessite une gestion des priorités entre eux, permise par la notion de maîtrise.
- La maîtrise : à un instant donné, un seul client peut agir sur le serveur, celui qui possède la maîtrise. Tant qu'il ne l'a pas relâchée, les autres clients ne peuvent que recevoir des données. Par défaut aucun client n'est maître ; il doit le demander au Superviseur (voir partie 3.4.3) pour le devenir.

La gestion des applications internes du Contrôle Global se traduit par des changements d'états. Dans le cas du Locking et de l'Alignement, nous avons 4 états possibles.

- Etat Idle : initialisation de l'application. Les applications sont chargées et sont maintenant prêtes à recevoir des commandes.
- Etat Configured : l'application importe à partir de la base de données (Db) les paramètres utiles aux algorithmes d'Alignement et du Locking ainsi que ceux permettant le dialogue entre la partie software et hardware du Contrôle Global.

- Etat Await : la synchronisation des photodiodes est vérifiée et des corrections nulles sont envoyées.
- Etat Steady : les corrections sont calculées et envoyées aux suspensions.

#### Le Superviseur du Contrôle Global

Le Superviseur gère une partition<sup>12</sup> pour l'exécution d'une tâche donnée. Il permet de démarrer les applications et de les piloter jusqu'à leur arrêt. Le pilotage du Contrôle Global, s'effectue dans ce cadre, à l'aide de son client graphique. Les figures 3.22 et 3.23 montrent une copie des deux écrans principaux de cette interface.

La fenêtre présentée sur la figure 3.22 permet de piloter la partition dans son ensemble tout en donnant quelques informations sur chacune des applications qui la composent. Sur la partie gauche, sous le nom de la partition, nous avons la liste des différents programmes dont les états courants sont donnés par un code de couleur : vert si tout va bien, rouge en cas de problème. L'inscription "Slave" montre que cette interface est actuellement spectatrice du fonctionnement du Contrôle Global. À droite, nous trouvons le détail de l'état global de la partition et en dessous celui d'un programme donné, sélectionné par l'opérateur du client graphique.

Sur la figure 3.23, nous pouvons voir la fenêtre graphique qui sert à gérer le fonctionnement des applications Locking et Alignement :

- sur la partie gauche apparaît une vue schématique de l'interféromètre Virgo. Un code de couleur permet de connaître l'état de synchronisation des signaux de photodiodes traités par le Contrôle Global. Les photodiodes et les photodiodes à quadrant sont indiquées avec leur position réelle dans Virgo ;
- en haut à droite : l'état du programme Locking est indiqué. En cliquant sur ce bouton, l'utilisateur peut passer d'un état à un autre par l'intermédiaire d'un menu déroulant. L'arborescence sur la structure interne de l'algorithme du Locking est aussi indiquée. Sur la partie en haut à droite de l'encadré est indiqué le nom du processeur chargé du Locking (RIO36B) ;
- la dernière partie indique l'état d'activation des boucles d'asservissements de l'Alignement. Nous pouvons fermer ou ouvrir ces boucles sur les degrés de liberté en  $\theta_x$  ou  $\theta_y$  pour tous les miroirs en cliquant sur les boutons correspondants.

À partir de cette interface, l'application Locking est démarrée, pilotée et enfin arrêtée.

#### Le serveur Locking

Le serveur Locking est en charge de deux tâches : premièrement, il doit gérer l'échange de données (signaux de photodiodes en entrée et corrections en sortie) avec les autres châssis à travers les cartes DOL. Deuxièmement, il doit appliquer les algorithmes de contrôle. Ces algorithmes sont stockés dans une librairie dédiée. L'application GcSiesta permet d'utiliser cette librairie avec la simulation SIESTA [66].

---

<sup>12</sup>Ensemble de programmes reliés entre-eux.

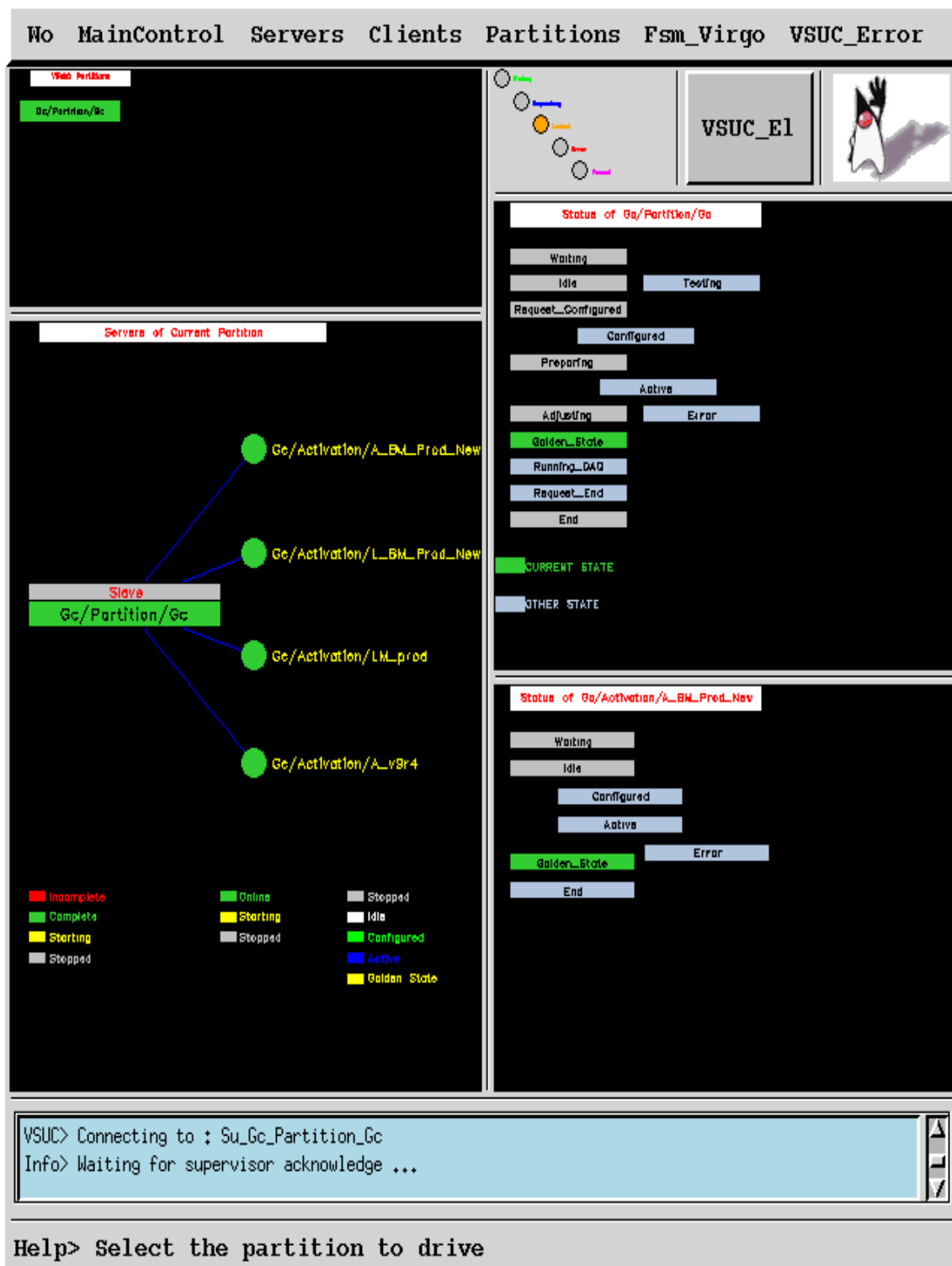


FIG. 3.22: Fenêtre générique du client graphique associé au Superviseur en charge du Contrôle Global : nous pouvons voir dans la partie gauche la liste des différentes applications. Les codes de couleurs permettent d'avoir une information sur leur état (vert = OK). Sur la droite, nous avons de haut en bas, l'état courant de la partition et celui d'une des applications choisie par l'opérateur.

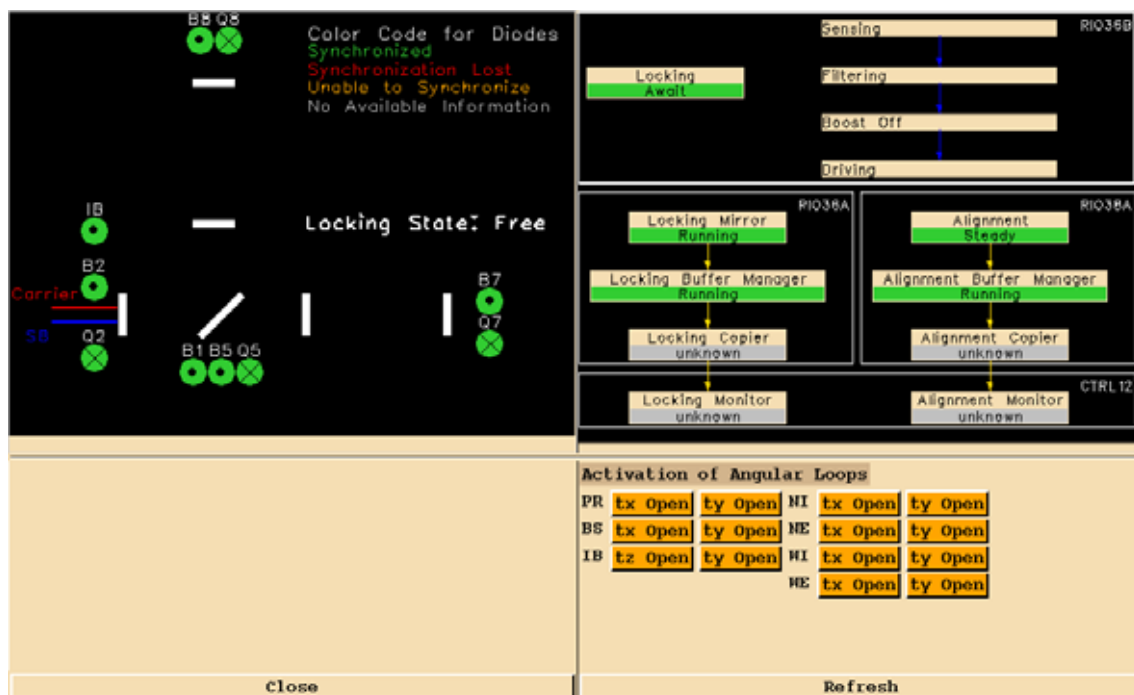


FIG. 3.23: Fenêtre spécifique du client graphique associé au Superviseur du Contrôle Global qui permet de piloter les programmes Locking et Alignement.



FIG. 3.24: Interface utilisateur de la base de données Db concernant le Locking.



*GcSiesta*

L'utilisation de l'application GcSiesta couplée à la simulation SIESTA (voir partie 3.3) permet un développement complet et un test des algorithmes de Locking sur une machine hors ligne dans des conditions proches de la réalité. Grâce à cette disposition, le développeur n'est pas limité par les contraintes de temps réel (par exemple pas de sortie à l'écran) et peut utiliser des outils de corrections puissants. Nous avons pu locker différentes configurations optiques à la première tentative (simple Fabry-Perot, configuration CITF, simple Michelson) avec des paramètres (filtre compensateur, gains optiques, niveau des seuils...) déterminés de cette façon.

Pour développer un algorithme de Locking, une première étape est de le faire en utilisant la simulation. Ensuite, il est nécessaire de l'adapter aux contraintes imposées par la réalité des données (par exemple les signaux DC négatifs) et à la contrainte temporelle introduite par le fait que la boucle d'asservissement du Locking doit avoir un temps de fonctionnement maximal de 100  $\mu$ s.

*La base de données (Db)*

Une base de données appelée Db [64] permet de stocker les configurations utilisées dans les applications des sous-systèmes qui pilotent le détecteur. L'utilisation de CVS assure une conservation de l'historique.

Chaque utilisateur peut construire des objets regroupant des données reliées entre elles. L'archive centrale se décompose en répertoires et une interface graphique (voir figure 3.24) permet de visualiser son contenu et de le modifier, de reprendre des versions passées d'un objet ou de sélectionner celles qui correspondent à un état particulier du système.

*On fly data*

Associée à Db et au Superviseur du Contrôle Global, l'interface graphique des "On-fly data" nous permet de modifier certains paramètres des algorithmes de Locking en temps réel. Par exemple, la modification du gain optique associé à une longueur peut être prise en compte sans délai par l'algorithme du Locking. Cet outil a été crucial dans l'établissement de l'algorithme de lock à "finesse variable" (voir Chapitre 5) actuellement utilisé.

Nous avons vu dans ce chapitre les différents éléments à la fois théoriques et techniques utilisés dans le Locking. Le chapitre suivant va nous en présenter l'application. Nous verrons le travail effectué pour le lock des cavités Fabry-Perot Nord et Ouest et de l'interféromètre recombinaison.

# Chapitre 4

## Lock des cavités Fabry-Perot et de l'interféromètre recombiné

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les principes fondamentaux concernant l'acquisition du lock d'une cavité Fabry-Perot. Dans ce chapitre nous présentons le travail expérimental effectué lors du commissioning de Virgo. Dans la première partie, nous expliquons les méthodes mises en place pour aboutir au lock de la cavité Nord. Ces mêmes outils ont été appliqués pour le lock du bras Ouest mais avec moins de succès à cause de problèmes dus aux contrôles locaux du miroir WE.

Après avoir réussi l'acquisition du lock des cavités Nord et Ouest, nous nous sommes intéressés au lock du mode recombiné de Virgo. Cette configuration optique est constitué du Michelson et des deux cavités Fabry-Perot. Puisque le miroir PR est désaligné l'algorithme d'acquisition du lock consiste à appliquer pour le contrôle de chaque longueur le même type d'algorithme adopté pour le lock des cavités Nord et Ouest. Enfin, la courbe de sensibilité du mode recombiné illustrera les progrès effectués et à réaliser pour atteindre la sensibilité nominale de Virgo.

### 4.1 Lock des cavités Fabry-Perot Nord et Ouest

#### 4.1.1 Lock de la cavité Fabry-Perot Nord

Les deux faisceaux utilisés pour l'acquisition du lock de la cavité Fabry-Perot du bras Nord sont (voir figure 4.1) :

- le faisceau réfléchi par la cavité Fabry-Perot Nord, recueilli par la photodiode B1p (ou B1 si nous utilisons le signal après le mode cleaner de sortie) ;
- le faisceau transmis par la cavité Fabry-Perot Nord mesuré par la photodiode B7.

Le signal B1p démodulé à  $\Omega$  est utilisé comme signal d'erreur. La puissance transmise par la cavité Nord B7\_DC, permet à la fois de repérer le passage à la résonance de la cavité et de linéariser le signal d'erreur.

En théorie, le signal d'erreur n'existe que sur une phase du signal démodulé. Cependant, en réalité, nous devons maximiser le rapport  $\frac{B1p\_ACp}{B1p\_ACq}$ . Cette optimisation consiste à changer la phase de démodulation du mélangeur utilisé pour produire les signaux d'erreurs.

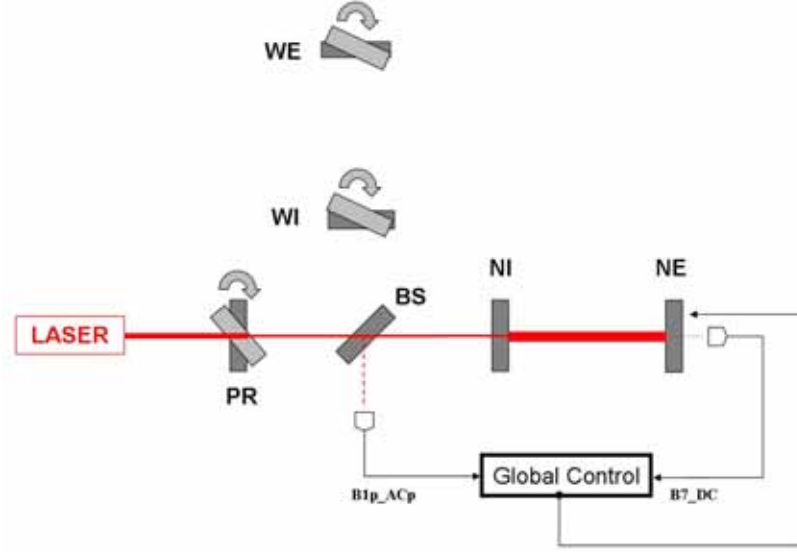


FIG. 4.1: Schéma de l'acquisition du lock de la cavité Fabry-Perot du bras Nord.

Nous séparons la partie sinus (phase) de la partie cosinus (quadrature) pour maximiser le rapport  $\frac{B1p\_ACp}{B1p\_ACq}$ .

Une première optimisation est obtenue en laissant la cavité Fabry-Perot évoluer librement. Pour cela, lorsqu'elle passe à la résonance, nous comparons à l'œil les amplitudes des signaux d'erreurs. Nous pouvons obtenir un découplage de l'ordre de 10 avec cette méthode.

Un meilleur découplage est obtenu lorsque la cavité est lockée. La méthode consiste à injecter dans le signal de correction un sinus d'une fréquence située entre la fréquence de gain unité de la boucle d'asservissement et le pôle de la cavité Fabry-Perot pour ne pas être affecté par la dynamique du système. Par l'intermédiaire du rapport des amplitudes des FFT des deux signaux d'erreurs à la fréquence considérée, pondéré par la fonction de transfert mécanique du miroir, nous obtenons un meilleur découplage.

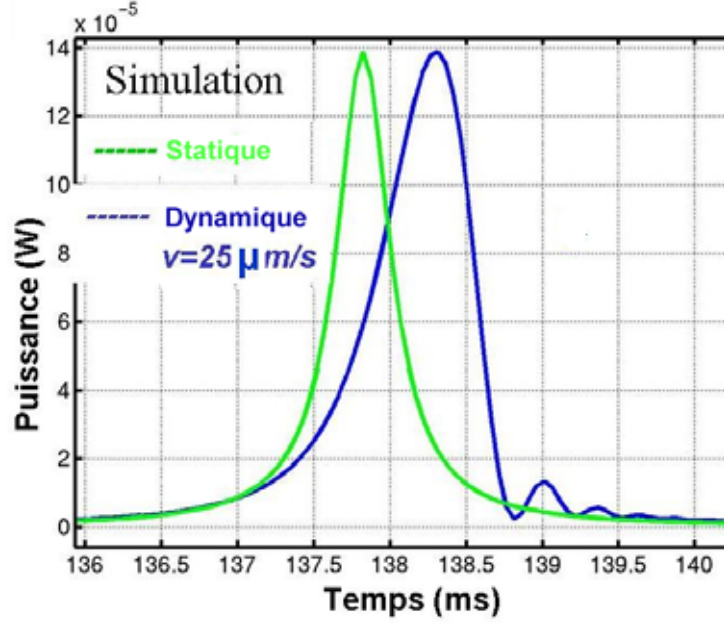
L'acquisition du lock de la cavité Nord a été préparée en simulation, puis un ajustement des paramètres de la simulation à partir des données a été fait. Les faisceaux réfléchis et transmis ont été comparés à ceux d'une simulation SIESTA. Cette simulation avait pour but de reproduire du mieux possible le comportement de la cavité réelle. Différents aspects ont été pris en compte :

- la dynamique de l'optique pour reproduire les signaux en régime transitoire (voir figure 4.2) : la faible finesse de la cavité Fabry-Perot Nord ( $\sim 50$ ) donne une vitesse seuil du régime transitoire proche de  $16 \mu\text{m/s}^1$ . Le pic d'Airy est déformé et son maximum est déplacé. De plus, apparaissent des rebonds dont la disposition et l'amplitude dépendent de la vitesse et de la finesse de la cavité.

<sup>1</sup>Cette valeur est obtenue en imposant que le temps de passage à la résonance de la cavité Fabry-Perot est inférieur au temps de stockage de la lumière dans la cavité :

$$\frac{\lambda}{4\mathcal{F}v} < \frac{4L\mathcal{F}}{\pi c} \Rightarrow v > \frac{\lambda\pi c}{8L\mathcal{F}^2}$$

Avec les paramètres de Virgo ( $\mathcal{F} \sim 50$ ,  $L \sim 3000$  m et  $\lambda = 1.064 \times 10^{-6}$  m), cette vitesse limite est :  $v \sim 16 \mu\text{m/s}$



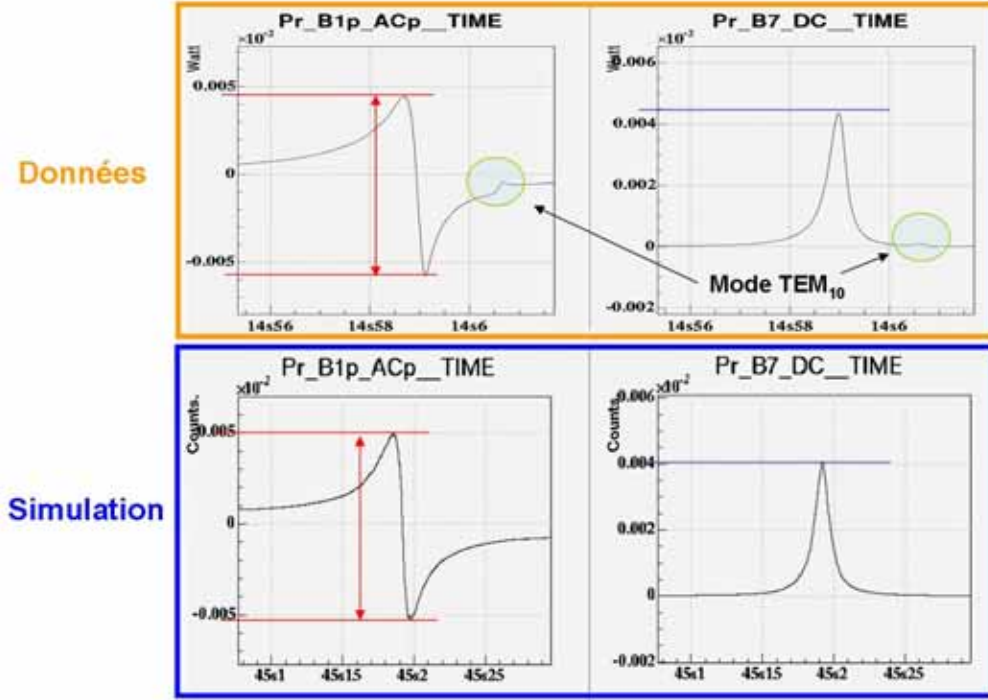
**FIG. 4.2:** Comparaison de la forme du pic d’Airy en régime statique et en régime transitoire. Nous avons simulé la cavité Fabry-Perot Nord de Virgo pour une vitesse de déplacement du miroir de  $25 \mu\text{m/s}$ .

Nous prenons également en compte la réponse fréquentielle de la cavité Fabry-Perot (voir Annexe A) qui possède un pôle proche de 500 Hz.

Ces deux effets ne sont pas importants pour l’acquisition du lock de la cavité Nord. Premièrement, grâce aux contrôles locaux la vitesse RMS des miroirs est de l’ordre  $1 \mu\text{m/s}$ . Deuxièmement, la prise en compte du pôle n’est pas cruciale pour la définition de la boucle d’asservissement car le gain unité est de l’ordre de 100 Hz, inférieur au pôle de la cavité. Cependant ce sont deux paramètres à prendre en compte si par exemple nous avons une finesse des cavités Fabry-Perot plus élevée comme c’est le cas pour LIGO ;

- les paramètres de photodiodes : saturations, bruit, filtre anti-repliement ;
- les paramètres optiques des miroirs et du système laser : la puissance du laser, la profondeur de modulation ainsi que les réflectivités, rayons de courbures et pertes des miroirs ont été introduits dans la simulation. Un désaccord important a été observé entre les amplitudes mesurées des signaux de photodiodes et la simulation. Ce désaccord est en partie dû aux éléments optiques d’extraction du faisceau (lentilles et séparatrice placés sur le banc des photodiodes). La mauvaise connaissance de la puissance en sortie du mode cleaner, de la profondeur de modulation et des paramètres réels des miroirs NI, BS et NE peut aussi expliquer cette différence. Un travail a été effectué pour essayer d’ajuster les amplitudes obtenues en simulation et mesurées sur l’instrument.

La figure 4.3 montre une comparaison entre les signaux AC et DC simulés et mesurés dont les amplitudes diffèrent de 5 %. Nous avons par la suite travaillé sur la simulation du lock de la cavité Nord.



**FIG. 4.3:** Signaux mesurés (en haut) et simulés (en bas) utilisés pour l'acquisition du lock de la cavité Nord. Partie gauche : signaux de réflexion démodulé. Partie droite : signaux transmis par la cavité. Nous pouvons noter la présence du mode  $TEM_{01}$  dans les données.

### La linéarisation

Comme décrit précédemment, par la technique de la linéarisation du signal d'erreur, la zone linéaire augmente (voir figure 4.4) jusqu'aux limites que déterminent les paramètres suivants :

- le bruit électronique du signal transmis (en s'éloignant de la résonance le rapport signal sur bruit se dégrade) ;
- la présence de modes d'ordre supérieurs, qui perturbent le signal linéarisé obtenu pour le mode fondamental  $TEM_{00}$ .

La figure 4.4 montre une comparaison des signaux d'erreurs linéarisés obtenus en simulation et ceux que nous avons mesurés. Dans le cas de la cavité Nord, le signal d'erreur linéarisé est obtenu en divisant le signal d'erreur B1p\_ACp par la puissance transmise par la cavité B7\_DC, et permet d'accroître la zone linéaire d'un facteur 10.

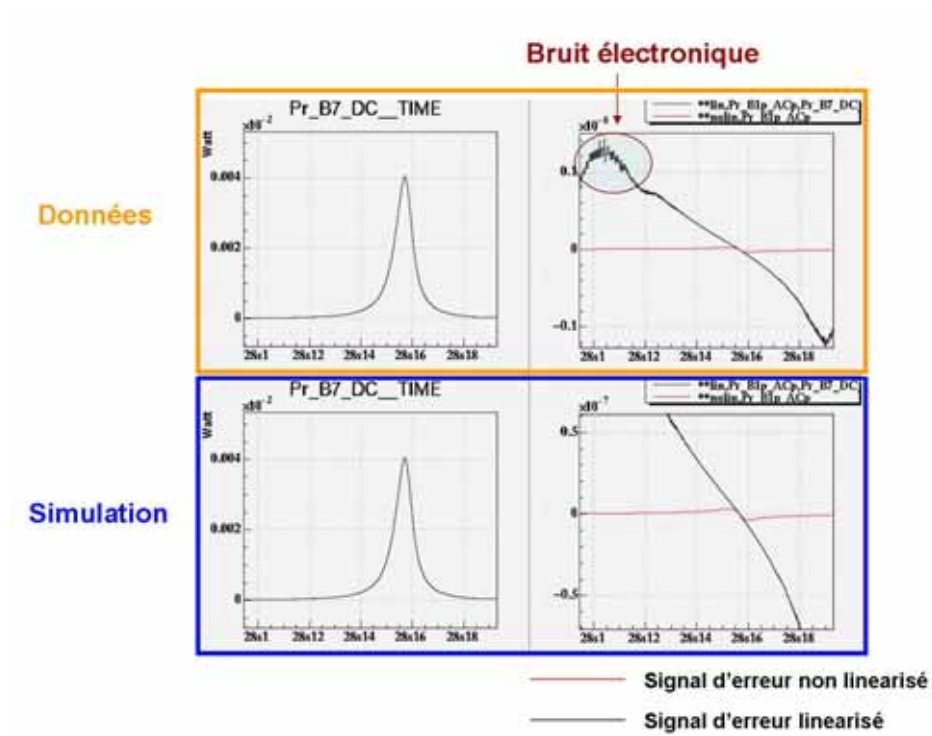


FIG. 4.4: Coté droit : Effet de la linéarisation du signal d'erreur avec les données (en haut) et en simulation (en bas). Coté gauche : La puissance transmise par la cavité est représentée pour les données (en haut) et la simulation (en bas).

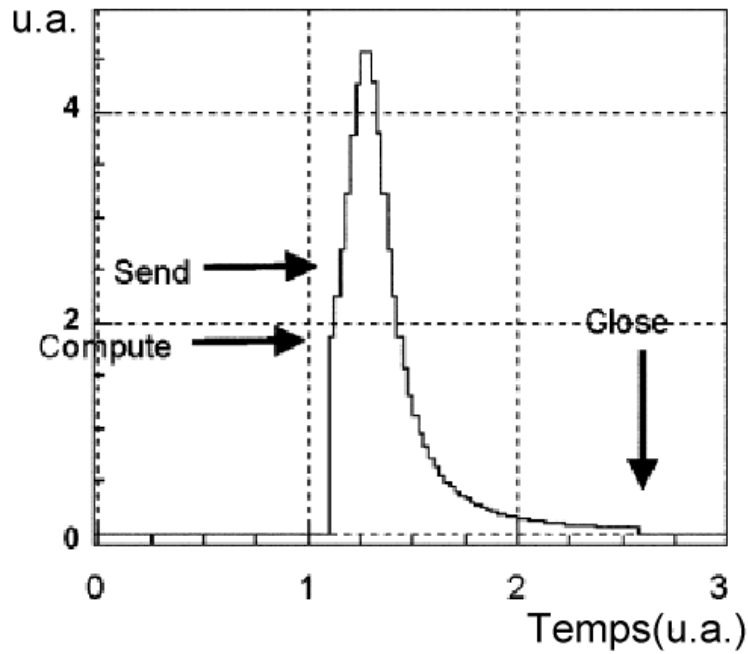


FIG. 4.5: Exemple de fenêtre d'acquisition du lock ou les différents états de l'algorithme sont représentés.

### Algorithme d'acquisition du Lock

Pour repérer le passage à la résonance de la cavité Fabry-Perot, nous utilisons le signal B7\_DC. Pour rendre l'algorithme indépendant d'éventuelles modifications sur les optiques d'extraction ou sur le système de traitement des signaux de photodiodes, nous normalisons le signal B7\_DC par sa valeur maximale.

En utilisant le signal d'erreur linearisé, le Contrôle Global reconstruit la longueur de la cavité. Cette longueur reconstruite est filtrée par le compensateur (voir plus loin) et le signal de correction correspondant est envoyé vers la suspension du miroir NE.

Après avoir identifié le passage à la résonance de la cavité et reconstruit sa longueur, nous devons définir le moment auquel nous devons envoyer les corrections vers le miroir NE. Nous définissons une fenêtre de travail constituée de trois phases (voir figure 4.5) :

- Phase Compute : La fenêtre de travail est fermée lorsque la puissance normalisée dépasse une certaine valeur, typiquement 50 % de la puissance maximale en sortie de la cavité Fabry-Perot sur le mode TEM<sub>00</sub>. Ceci nous permet d'isoler le mode TEM<sub>00</sub> des autres modes de la cavité et d'être proche du point de travail. L'algorithme calcule les corrections sans les envoyer aux suspensions ;
- Phase Send : Après une durée de plusieurs  $\mu s$  (définie par l'utilisateur), les corrections sont réellement envoyées vers les suspensions. Cette phase permet d'éliminer l'apparition du signal transitoire dû à la partie dérivative du filtre de compensation qui assimile le passage d'une valeur nulle à une valeur non nulle du signal de correction à un signal du type Heaviside ;
- Phase Close : La fenêtre de travail est ouverte lorsque la puissance atteint quelques pourcent de la puissance maximale. Le seuil est placé plus bas que pour la phase Compute pour élargir la zone de travail de la boucle d'asservissement.

Quand nous sommes en dehors de la fenêtre de travail, les mémoires des filtres sont initialisées de sorte que l'algorithme est prêt pour la prochaine tentative de lock.

### Le filtre de compensation

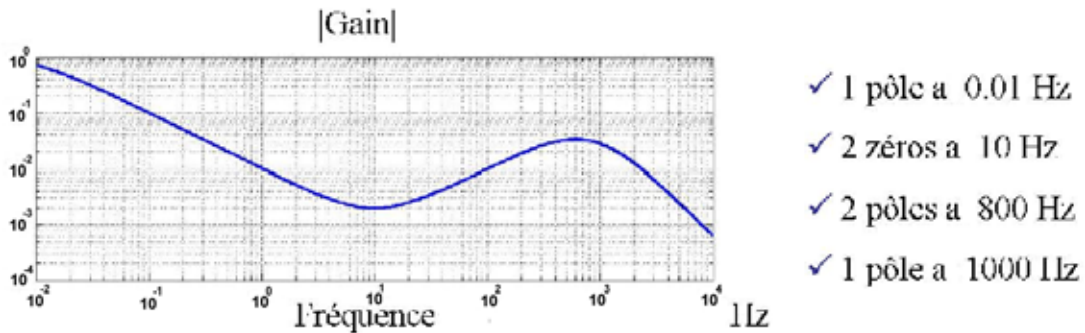


FIG. 4.6: Fonction de transfert en amplitude du filtre de compensation.

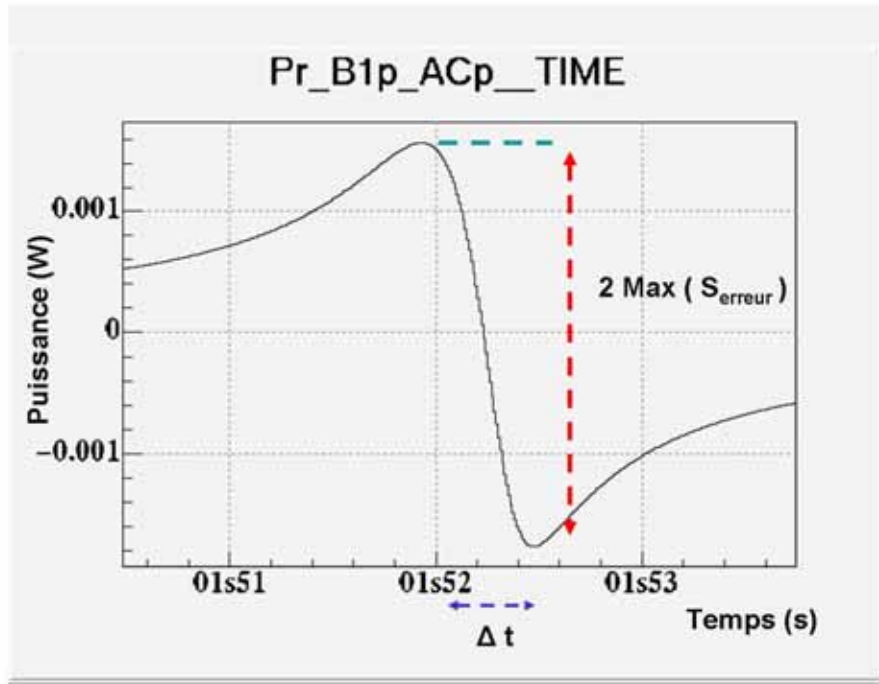
Un élément essentiel dans la boucle d'asservissement est le filtre de compensation. Il doit respecter les critères de stabilité et doit compenser au mieux la dynamique du système (vitesse de la cavité, erreur sur l'estimation de la longueur, pôle de la cavité Fabry-Perot...). Le filtre de compensation que nous utilisons (voir figure 4.6), a une réponse proportionnelle entre 0 et 10 mHz, une réponse intégratrice entre 10 mHz et 10 Hz, une réponse dérivative entre 10 Hz et 800 Hz et enfin une réponse intégratrice au delà de 800 Hz. Le gain du filtre de compensation a été choisi pour avoir une fréquence de gain unité aux alentours de 50 Hz. La bande passante ainsi définie limite l'introduction des bruits des boucles d'asservissement sur la sensibilité de Virgo et compense le mouvement des miroirs produit par le bruit sismique.

### Acquisition du lock

Pour acquérir le lock de la cavité Nord, il est nécessaire d'estimer le gain optique pour reconstruire la longueur. Celui-ci est défini par le signal d'erreur :

$$S_{\text{PoundDrever}} = K P(\delta L) \delta L \quad (4.1)$$

où  $K$  est le gain optique.



**FIG. 4.7:** Exemple d'un signal d'erreur où sont représentés les paramètres nécessaires à la mesure du gain optique.

Pour calculer ce gain optique en première approximation, nous calculons la pente du signal d'erreur représenté sur la figure 4.7 :

$$K \sim \frac{2 \text{Max}(S_{\text{erreur}})}{\Delta t} \quad (4.2)$$



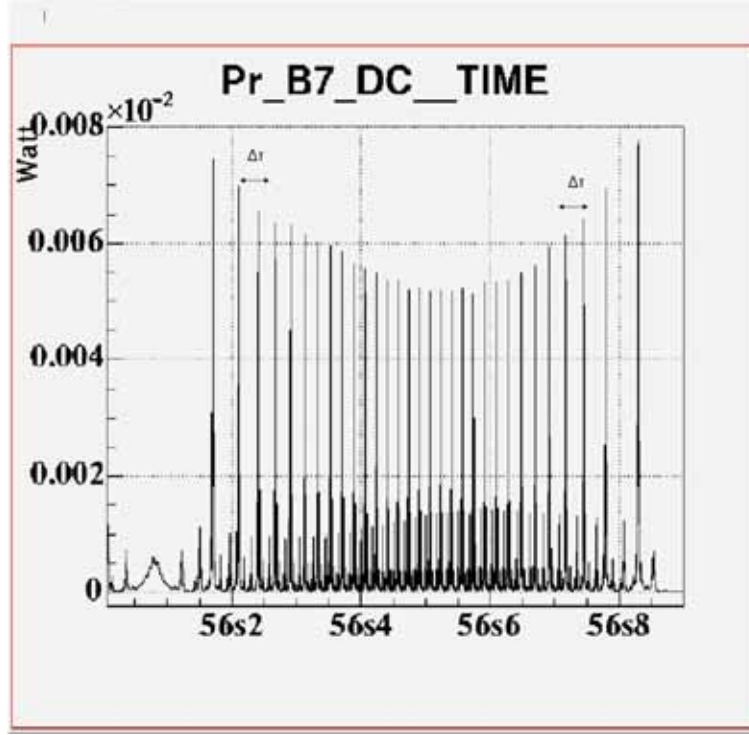


FIG. 4.8: Puissance mesurée en sortie de la cavité Fabry-Perot Nord lors du commissioning de ce bras.

Le temps  $\Delta t$  est la durée du passage à la résonance de la cavité Fabry-Perot, soit :

$$K \sim \frac{2 \text{Max}(S_{\text{erreur}})}{\frac{\lambda}{2\mathcal{F}} v_{\text{cavité}}} \quad (4.3)$$

Expérimentalement, la vitesse de la cavité optique est grossièrement estimée en mesurant la durée  $\Delta\tau$  entre deux résonances distantes de  $\frac{\lambda}{2}$  avec la cavité qui se déplace librement (voir figure 4.8). Nous estimons sa vitesse de la manière suivante :

$$v_{\text{cavité}} = \frac{\lambda/2}{\Delta\tau} \quad (4.4)$$

Ainsi le gain optique est donné par la relation :

$$K \sim 2 \frac{\text{Max}(S_{\text{erreur}}) \mathcal{F}}{\Delta\tau} \quad (4.5)$$

Après avoir estimé les différents paramètres nécessaires à l'algorithme de lock, nous avons simulé l'acquisition du lock de la cavité (voir figure 4.9). Le lock est obtenu à la première tentative en quelques ms.

Après avoir testé l'algorithme de lock en simulation, nous l'avons appliqué sur l'instrument et nous avons locké à la première tentative la cavité Nord en Octobre 2003. Ce premier lock est illustré sur la figure 4.10. Les oscillations à basse fréquence visible sur la puissance en sortie de la cavité Fabry-Perot (période de 1 s) sont dues à l'absence d'alignement du faisceau et les oscillations à plus haute fréquence au bruit de fréquence du laser.

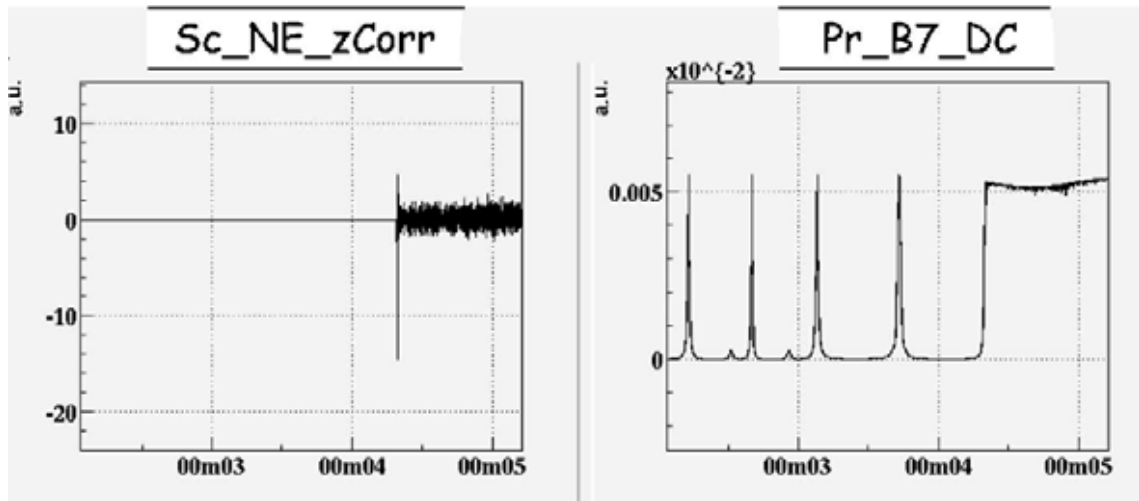


FIG. 4.9: Simulation de l'acquisition du lock. Le signal de correction (Sc\_NE\_zCorr) en volts est envoyé au miroir NE. La puissance transmise est visible sur la figure de droite et nous pouvons y voir le moment où le lock est acquis.

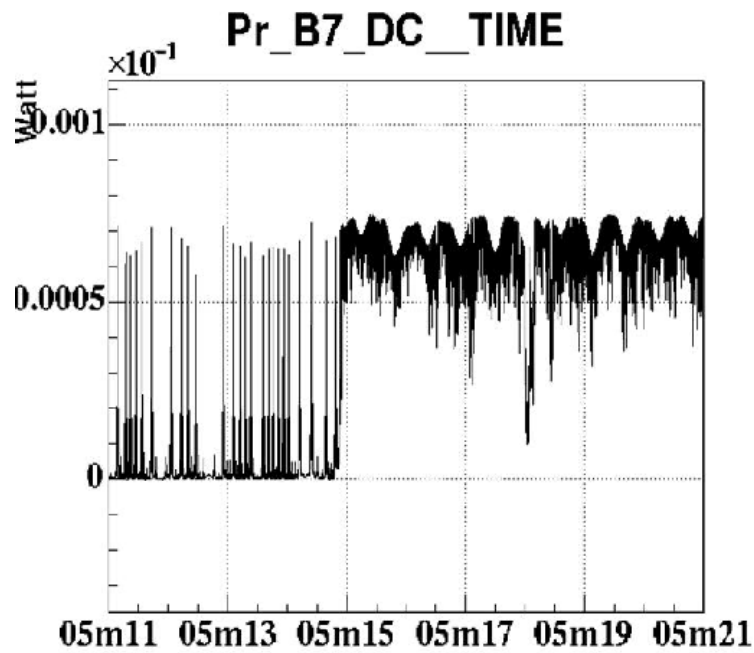
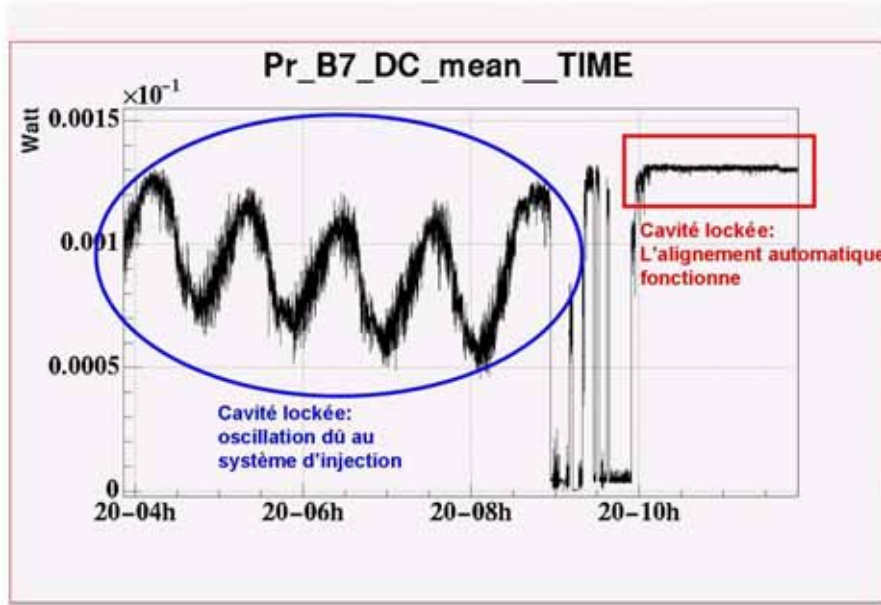


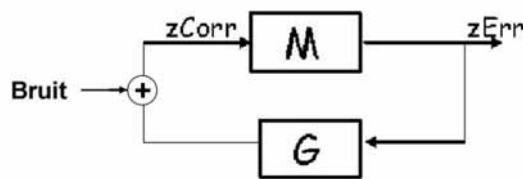
FIG. 4.10: Puissance mesurée en sortie de la cavité Fabry-Perot Nord où est visible le moment de l'acquisition du lock. Les oscillations sont dues aux bruits de fréquence du laser et à l'alignement du faisceau.



**FIG. 4.11:** Puissance mesurée en sortie de la cavité Fabry-Perot Nord. Nous distinguons deux périodes : oscillation de la puissance due à des problèmes du système d'injection (bruit de fréquence et d'alignement du faisceau laser) ; puissance très stable grâce à l'Alignement.

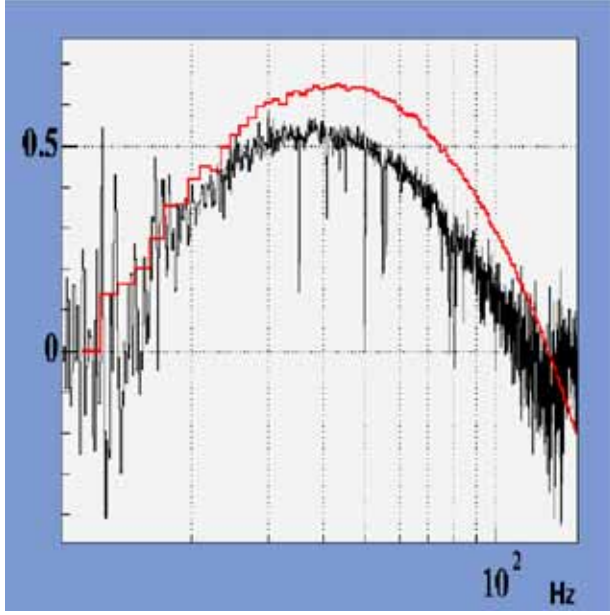
Après un travail sur le bruit de fréquence et l'alignement du faisceau laser puis la mise en fonctionnement de l'Alignement en Février 2005, la puissance en sortie de la cavité est devenue très stable comme l'illustre la figure 4.11.

### Caractérisation du lock

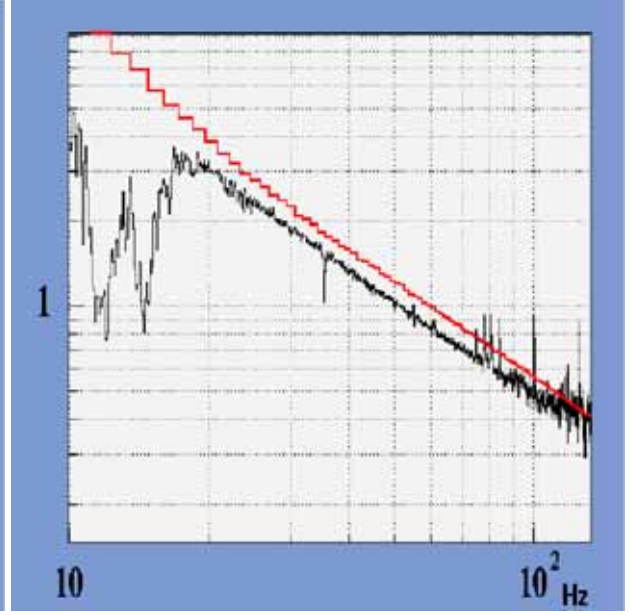


**FIG. 4.12:** Principe de mesure de la fonction de transfert en boucle ouverte.  $zCorr$  indique le signal de correction envoyé aux suspensions ;  $zErr$  est le signal d'erreur ; Bruit est le signal en général du bruit blanc introduit dans la boucle d'asservissement. La mesure consiste à faire la fonction de transfert entre le bruit introduit et le signal de correction ( $zCorr$ ).

Nous avons par la suite, analysé le comportement de la boucle d'asservissement à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte pour, si nécessaire, l'optimiser par la suite. La mesure consiste à obtenir la fonction de transfert entre le bruit introduit dans la boucle et le signal de correction employé pour acquérir le lock (voir la figure 4.12).



**FIG. 4.13:** Comparaison entre le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte mesurée (noir) et simulée (rouge).



**FIG. 4.14:** Comparaison entre la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte mesurée (noir) et simulée (rouge).

Les figures 4.13 et 4.14 présentent une comparaison entre les fonctions de transfert en boucle ouverte obtenue par SIESTA (rouge) et celle mesurée. La marge de gain est de 3 (simulée 3.3) et la marge de phase de 30 degrés (simulée 30 degrés). Les mesures sont comparables et assurent une bonne stabilité du système (voir page 81).

Il n'est pas suffisant de constater la robustesse du filtre. Avant toute optimisation de celui ci dans un but de réduction du bruit qu'il introduit, nous devons évaluer de manière plus précise le gain optique. En effet, ce dernier nous permet de reconstruire la longueur que nous contrôlons.

Pour faire cette mesure après avoir acquis le lock, nous injectons une ligne<sup>2</sup> à 323 Hz (entre la fréquence de gain unité de la boucle d'asservissement et le pôle de la cavité Fabry-Perot) et nous évaluons la fonction de transfert entre le signal de correction et la ligne introduite, à partir de la relation suivante :

$$\text{GainOptique} = \frac{\text{AmpFFT}(\text{SignalErreur})}{\text{AmpFFT}(\text{Lignes})} \sqrt{1 + \left( \frac{\text{Fréq. ligne}}{\text{Fréq. propre suspension}} \right)^2} \cdot \text{Calibration} \quad (4.6)$$

Dans cette expression, nous avons pris en compte la fonction de transfert mécanique du miroirs suspendu avec sa fréquence propre de 0.6 Hz, sur laquelle la correction est appliquée. Il apparaît un terme de calibration qui mesure le déplacement du miroir en fonction du courant appliqué aux bobines. Une valeur typique de gain optique est de  $10^7$  W/m.

Nous avons par la suite évalué le comportement de l'instrument avec le bras Nord locké pendant plusieurs jours : le run C1.

---

<sup>2</sup>Terme technique qui signifie sinusoïde pure.

## Le run C1

Durant ce run, le signal utilisé pour acquérir le lock a été au départ le signal d'erreur B1p\_ACp puis le signal d'erreur transmis par le mode cleaner de sortie B1\_ACp. Pour effectuer ce changement, nous mesurons à partir de la fonction de transfert entre les deux signaux d'erreurs, le facteur de calibration. La transition s'effectue par l'intermédiaire du système d'acquisition des photodiodes.

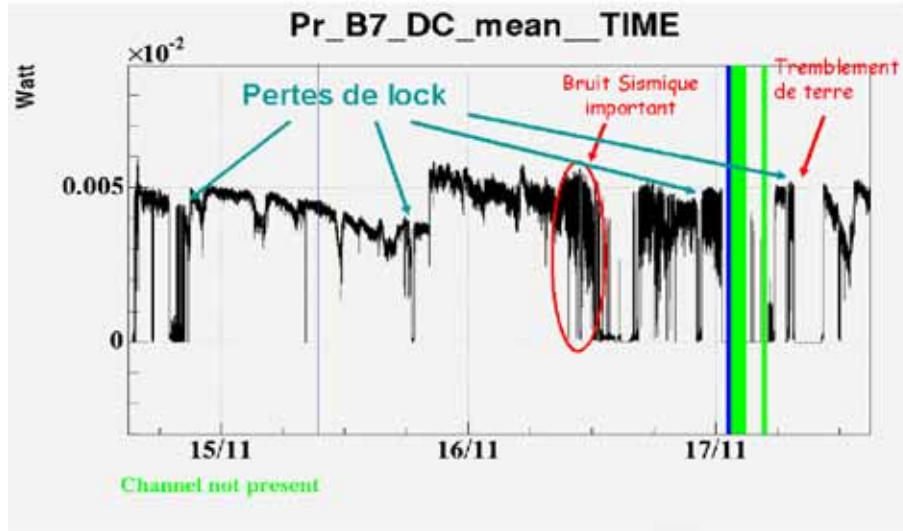


FIG. 4.15: Puissance mesurée en sortie de la cavité Fabry-Perot Nord durant le run C1.

Le run C1 a eu lieu du 14 Novembre au 17 Novembre 2003. La figure 4.15 montre que le plus long lock a duré près de 12 heures. Le lock a été perturbé pour différentes raisons. Tout d'abord, au début du run, des tests ont été effectués pour valider et étudier le comportement de l'interféromètre pour différents bruits. L'absence de l'Alignement a aussi affecté la robustesse du lock. De plus, nous avons traversé des périodes de grandes activités sismiques qui ont fait délocker le système.

Une étude a été faite pour comprendre la structure de la courbe de sensibilité obtenue lors de ce run (voir figure 4.16)[67]. La contribution à basse fréquence provient des bruits de contrôles et surtout du bruit introduit par la boucle du Locking. À plus haute fréquence, nous avons le bruit de fréquence du laser qui intervient. Nous voyons qu'une composante de ce bruit est introduit par le bruit de contrôle de la longueur du mode cleaner. Enfin, à très haute fréquence, la contribution du bruit électronique dû à la photodiode est visible.

Nous pouvons comparer (voir figure 4.17), la sensibilité de la cavité en fonction du signal d'erreur utilisé pour le lock (B1p\_ACp ou B1\_ACp). Nous observons une différence à basse et haute fréquence. Entre 10 mHz et 7 Hz, la sensibilité est meilleure avec le signal d'erreur B1\_ACp car le mode cleaner de sortie filtre la contribution des modes d'ordre supérieur. Entre 10<sup>3</sup>Hz et 10<sup>4</sup>Hz, l'utilisation de B1\_ACp augmente d'un facteur 15 la sensibilité car cette photodiode reçoit 200 fois plus de puissance que B1p\_ACp. Sur cette photodiode, l'effet limitant est le bruit de fréquence du laser.

Nous avons par la suite travaillé à la préparation du lock du bras Ouest.

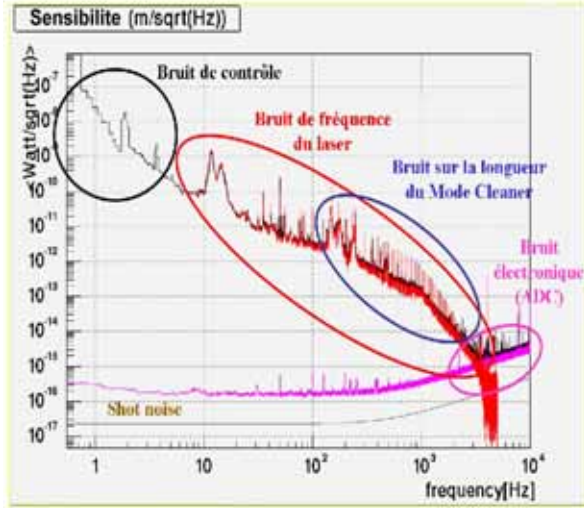


FIG. 4.16: Structure des bruits visibles sur la courbe de sensibilité de la cavité Fabry-Perot Nord.

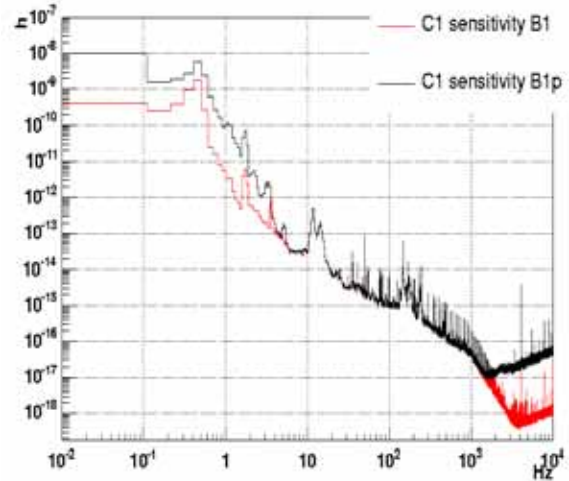


FIG. 4.17: Comparaison des sensibilités obtenues en changeant le signal d'erreur utilisé pour le lock de la cavité Fabry-Perot Nord.

### 4.1.2 Lock de la cavité Fabry-Perot Ouest

Tous les principes présentés précédemment s'applique au lock de la cavité Fabry-Perot du bras Ouest. Cependant, une différence notable est introduite par le fait que dans ce cas le faisceau entrant dans la cavité est réfléchi par la séparatrice. Un contrôle angulaire précis du miroir est donc nécessaire. Lorsque nous avons fait la première tentative de lock de la cavité Ouest, nous ne sommes resté locké que trois minutes. Une oscillation anormale au niveau des contrôles locaux à 1.7 Hz est apparue sur le signal de correction et a engendré la perte du lock. Cette oscillation a aussi été observée sur la cavité Nord et a provoquée un delock du système comme l'illustre la figure 4.18. Nous observons que sur les différents signaux qui décrivent le comportement angulaire au niveau des miroirs et de la marionette, une fréquence caractéristique de 1.7 Hz apparaît. Il s'agit donc de la même excitation qui provoque le delock. Après un travail sur les contrôles locaux, la contribution de la composante à 1.7 Hz a diminué et nous avons pu locker la cavité sans aucun problème comme l'illustre la figure 4.19.

### 4.1.3 Les runs C2 et C3

Les configurations de travail durant ces deux runs sont les suivantes :

- Run C2 : cavité Fabry-Perot Nord locké avec l'Alignement + Cavité Fabry-Perot Ouest locké sans l'Alignement.
- Run C3 : cavités Fabry-Perot Nord et Ouest lockées avec l'Alignement et deuxième étage de stabilisation de fréquence.

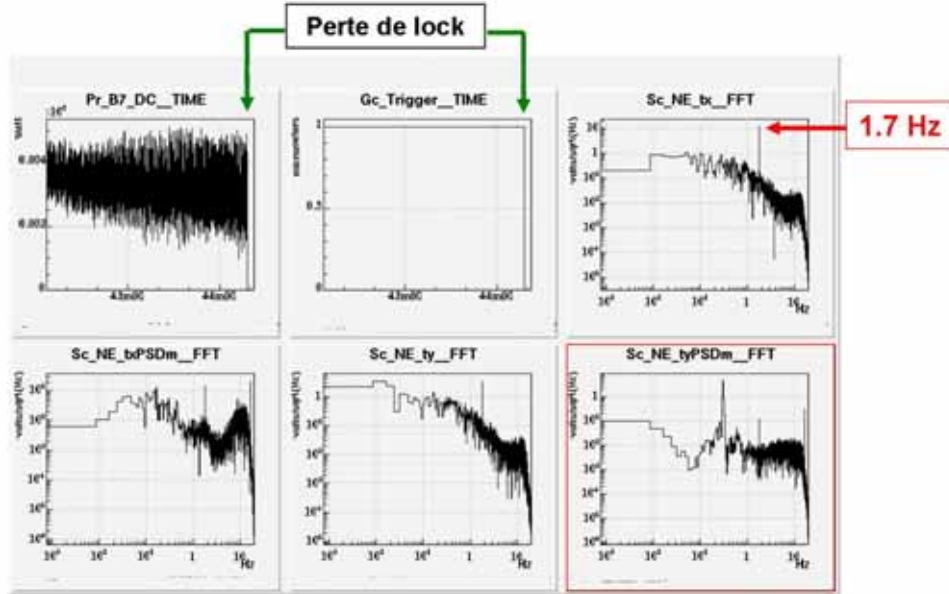


FIG. 4.18: En haut à gauche se trouve la puissance mesurée en sortie de la cavité Fabry-Perot Nord. Le signal Gc\_Trigger indique que le lock est en phase active. Les autres figures présentent une FFT des signaux mesurant les variations des degrés de liberté en  $\theta_x$  et  $\theta_y$  au niveau du miroir (Sc\_NE\_tx, Sc\_NE\_ty) et de la marionnette (Sc\_NE\_txPSD, Sc\_NE\_tyPSD).

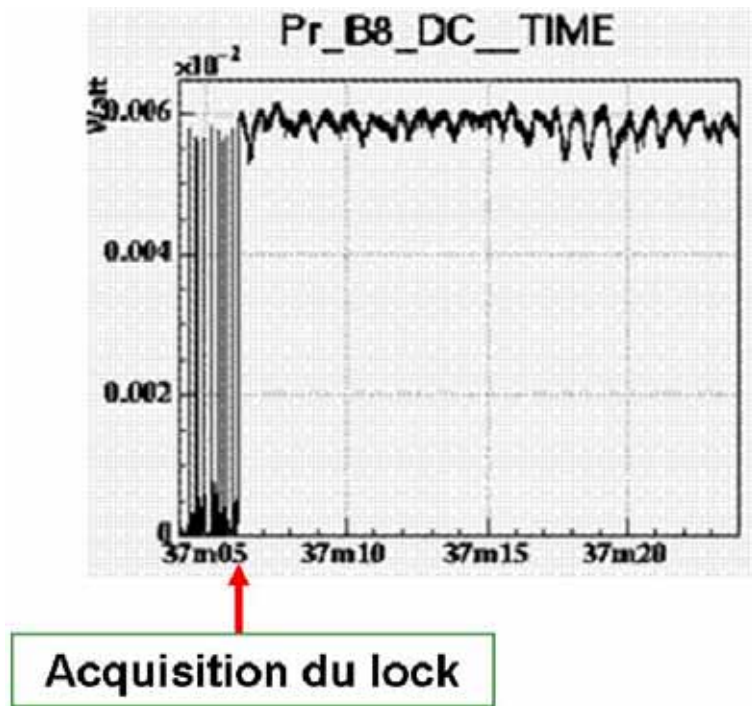


FIG. 4.19: Signal qui mesure la puissance en sortie de la cavité Fabry-Perot Ouest. Nous pouvons voir le moment où nous avons acquis le lock de la cavité Fabry-Perot Ouest.



Nous allons dans ce qui suit expliciter rapidement ce qu'est le deuxième étage de stabilisation de fréquence (SSFS<sup>3</sup>) [73] qui intervient lors du run C3 et que nous utilisons dans la stratégie d'acquisition du lock de Virgo.

### Le deuxième étage de stabilisation de fréquence

Nous devons stabiliser en fréquence le laser car le port antisymétrique (frange d'interférence du Michelson) mesure la superposition de l'onde gravitationnelle et du bruit de fréquence du laser :

$$S_{B1} = \alpha \left( h + \beta \frac{\delta \tilde{\nu}}{\nu_0} \right) \quad (4.7)$$

où  $\alpha$  est une constante,  $h$  est l'amplitude de l'onde gravitationnelle,  $\beta$  ( $\sim$  quelques %) est l'asymétrie de l'interféromètre,  $\delta \tilde{\nu}$  est le bruit de fréquence du laser restant et  $\nu_0$  la fréquence de la lumière. Par conséquent, la limite sur le bruit de fréquence du laser donnée par la relation 4.7 est :

$$\frac{\delta \tilde{\nu}}{\nu} < 10^{-7} \text{ Hz}/\sqrt{\text{Hz}}$$

Pour respecter cette spécification, à haute fréquence il est nécessaire d'asservir le laser sur un étalon de longueur. Le mode commun des bras ( $\text{CARM} = l_N + l_W$  ; voir page 127) de l'interféromètre va être utilisé à cet effet.

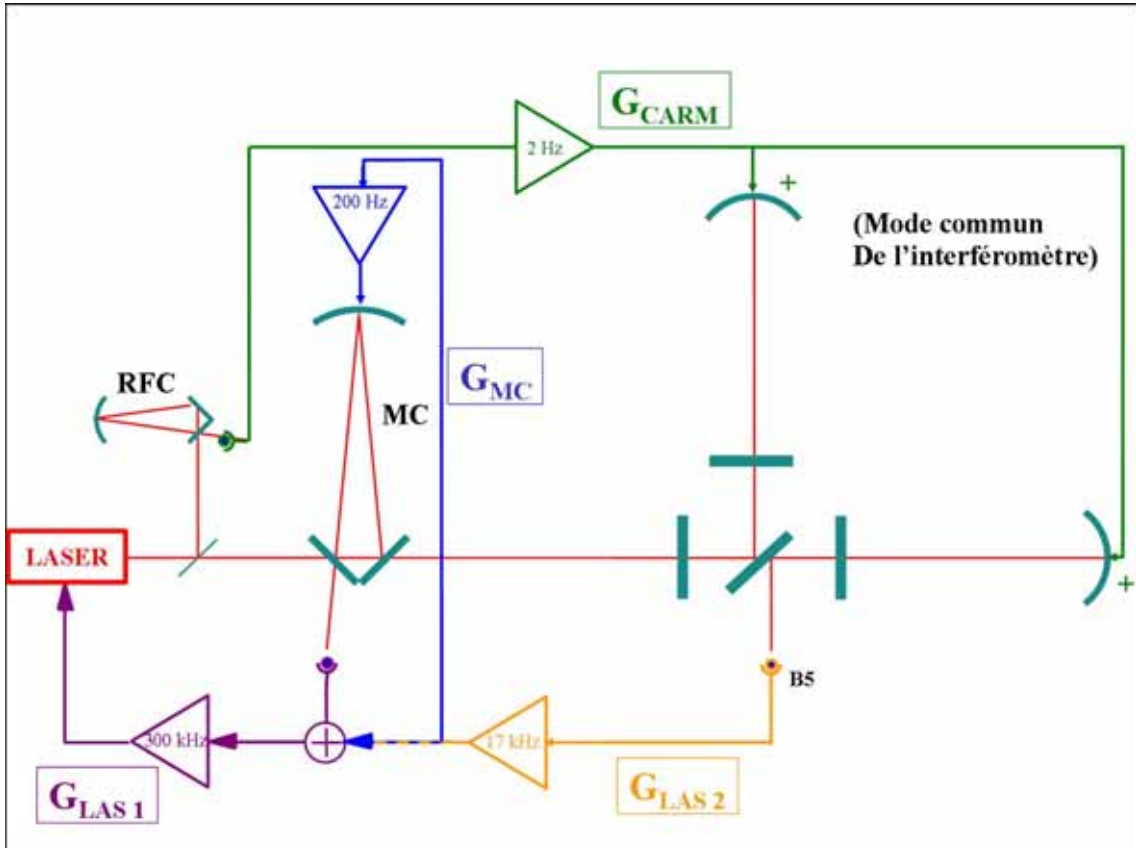


FIG. 4.20: Représentation des quatres boucles utilisées pour le deuxième étage de stabilisation en fréquence du laser.

<sup>3</sup>Second Stage of Frequency Stabilisation.



La stabilisation en fréquence utilise les éléments suivants : la cavité de référence (RFC), le mode cleaner en entrée (IMC) et le mode commun de l'interféromètre (CARM). Elle se compose des quatres boucles illustrées sur la figure 4.20 :

- La fréquence du laser est pré-stabilisée en utilisant le mode cleaner d'entrée et la cavité de référence (voir page 41). Deux boucles d'asservissement sont utilisées à cet effet  $G_{MC}$  dont la bande passante est de 200 Hz et  $G_{LAS1}$  dont la bande passante est de 300 kHz.
- La boucle de contrôle  $G_{CARM}$  asservit le mode commun des bras (CARM) sur le laser avec une bande passante de 2 Hz à partir du signal d'erreur issu de la cavité de référence. Il permet de réduire le mouvement basse fréquence des suspensions et d'obtenir un meilleur contrôle du mode cleaner de sortie.
- La boucle d'asservissement  $G_{LAS2}$  dont la bande passante est de 17 kHz est le deuxième étage de stabilisation de fréquence. Le signal d'erreur utilisé peut être issu de la photodiode B2 ou B5 (voir page 71).

Pour contrôler le laser, nous utilisons un asservissement possédant une boucle rapide (haute fréquence) et une boucle lente (basse fréquence) comme l'illustre la figure 4.21. La lumière réfléchie par la cavité Fabry-Perot maintenue à la résonance est collectée par une photodiode. Cette photodiode produit un signal d'erreur. Ce signal d'erreur est ensuite filtré par le compensateur de la boucle rapide  $K_{rapide}$  et envoyé à un actuateur (piezo de la cavité laser).

Puisque l'excursion de l'actuateur de la boucle rapide est limitée, le signal de correction est filtré par le compensateur de la boucle lente  $K_{lente}$  et envoyé à un actuateur agissant à basse fréquence (contrôle de la température de la cavité laser).

Le bruit de fréquence propre au laser  $\nu_{laser}$  est ainsi réduit.

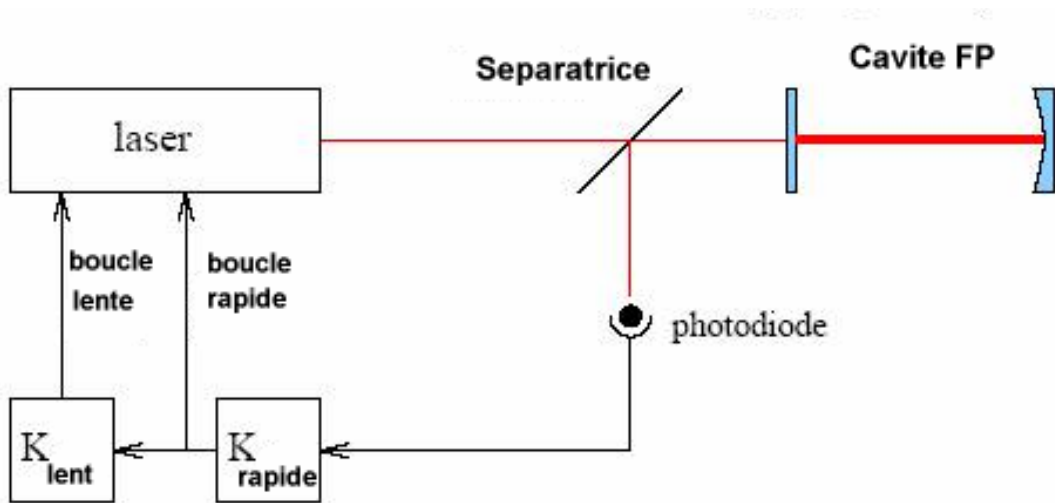


FIG. 4.21: Schéma de la stabilisation en fréquence du laser sur une cavité Fabry-Perot.

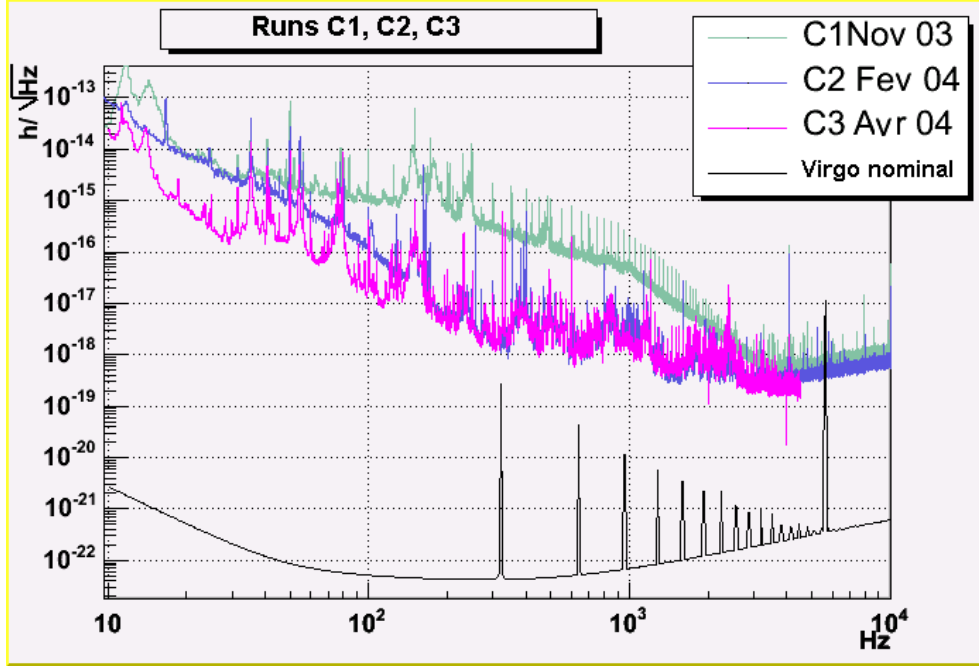


FIG. 4.22: Comparaison des sensibilités des runs C1, C2 et C3 à la sensibilité nominale.

L'utilisation de la SSFS nécessite que les cavités soient contrôlées. Le passage du lock de la longueur CARM par la reconstruction optique au lock par la SSFS se fait dans l'algorithme de lock implementé dans le Contrôle Global. Nous n'avons utilisé la SSFS que durant le run C3.

La figure 4.22 présente une comparaison de la sensibilité entre les runs C1, C2 et C3. La sensibilité entre les runs C2 et C3 est comparable. Cependant, la courbe de sensibilité du run C3 est représenté jusqu'à 4.5 kHz seulement. Cette limite est induite par l'utilisation de la SSFS qui modifie de manière substantielle la réponse optique de l'instrument au-dessus de 1 kHz. En effet, la courbe de sensibilité est obtenue par extrapolation de la réponse optique de la cavité au dessus du pôle de cette dernière ( $\sim 500$  Hz). Cette extrapolation est obtenue en injectant un bruit, en général blanc, dans la boucle d'asservissement. Si la cohérence entre le signal en boucle ouverte et le bruit est proche de 1, l'extrapolation est correcte. Avec la SSFS, la cohérence reste correcte jusqu'à 4.5 kHz.

Nous avons, durant ces différents runs, optimisé le filtre de compensation pour obtenir un gain plus élevé à basse fréquence et une réduction de la contribution du bruit de contrôle à la courbe de sensibilité. La figure 4.23 présente une comparaison entre ces deux filtres. L'effet du changement du filtre est mesurable sur la précision avec laquelle nous contrôlons la longueur de la cavité Nord. Cette précision est illustrée sur la figure 4.24. Tout d'abord, la précision a augmenté entre les runs C1 et C2 pour la cavité Fabry-Perot Nord par l'utilisation de l'Alignement et surtout la suppression de la résonance à 1.7 Hz des contrôles locaux responsable des difficultés d'acquisition du lock de la cavité Ouest. Pour ce qui concerne le run C2 et C3, l'amélioration est directement dû au filtre utilisé. Nous avons gagné un facteur 4. Nous avons contrôlé la longueur de la cavité Fabry-Perot Nord avec une précision de  $3 \cdot 10^{-12}$  m. Les spécifications sur la précision du lock sont ainsi remplies (voir chapitre 5).

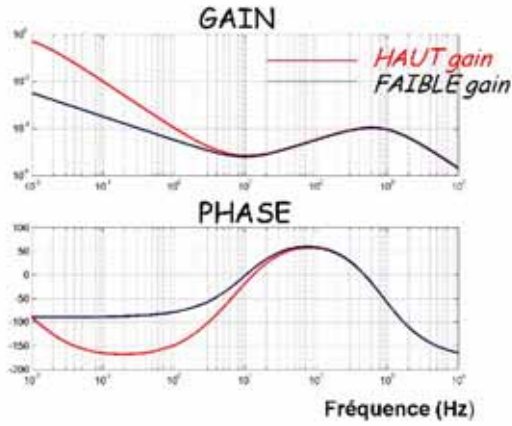


FIG. 4.23: Comparaison des fonctions de transfert des filtres de correction en haut et bas gain.

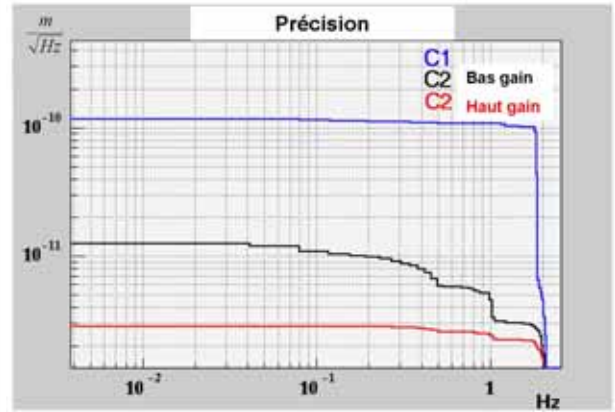


FIG. 4.24: Comparaison de la précision sur le contrôle de la longueur de la cavité Fabry-Perot Nord : C1 (bleu), C2 Bas gain (Noir), C2 Haut Gain (Rouge).

## 4.2 L'interféromètre recombéné

### 4.2.1 Vers l'interféromètre recombéné ?

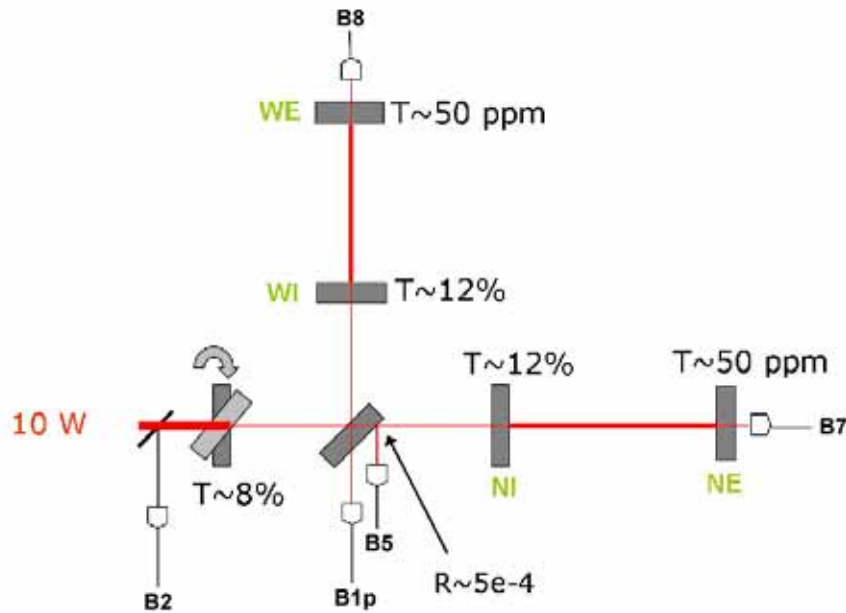


FIG. 4.25: Représentation schématique du mode recombéné de Virgo.

Après avoir contrôlé les deux cavités Fabry-Perot, l'étape suivante a été de locker ces deux cavités ainsi que l'interféromètre de Michelson. Cette configuration optique porte le nom d'interféromètre recombéné (voir figure 4.25).

Elle est formée des miroirs BS, NI, WI, NE et WE. Le miroir PR est désaligné. Plusieurs motivations ont incité la collaboration à travailler dans cette configuration :

- nous avons un signal de frange noire. Une étude précise des asymétries des bras est possible ;
- nous pouvons réellement stabiliser le laser à partir du mode commun (CARM) du mouvement des cavités Fabry-Perot des bras ;
- nous pouvons tester le lock de l'interféromètre de Michelson en agissant sur la séparatrice.

### 4.2.2 Le locking

Le fait que le miroir de recyclage soit désaligné permet d'avoir des champs non couplés dans l'interféromètre. Nous pouvons donc contrôler indépendamment chacune des trois longueurs caractéristiques suivantes :

- la différence de longueur des bras du Michelson : MICH ;
- la longueur de la cavité Fabry-Perot du bras Nord : NARM ;
- la longueur de la cavité Fabry-Perot du bras Ouest : WARM.

### Matrice de répartition

La matrice de répartition des corrections pour le contrôle des différentes longueurs est la suivante :

$$\begin{pmatrix} Z_{NE} \\ Z_{WE} \\ Z_{BS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{NARM} \\ \text{WARM} \\ \text{MICH} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

L'algorithme de lock utilisé est le même que celui employé pour le lock des cavités Fabry-Perot.

Les signaux qui distinguent le passage à la résonance des cavités Fabry-Perot sont les signaux en DC des photodiodes placées en sortie des bras (B7\_DC et B8\_DC). Nous fermons la boucle d'asservissement quand nous avons atteint 80% de la puissance maximale de la résonance de la cavité Fabry-Perot et nous l'ouvrons à 5% de cette puissance.

En ce qui concerne le Michelson, le signal qui permet de distinguer le passage à la frange noire est le signal B1p\_DC. Nous fermons la boucle d'asservissement lorsque nous atteignons 5% de la frange blanche et nous l'ouvrons à 20%.

Le contrôle des longueurs se fait de manière séquentiel. Nous commençons par contrôler chacune des cavités Fabry-Perot puis nous terminons par le Michelson. La figure 4.26 présente le schéma de lock adopté.

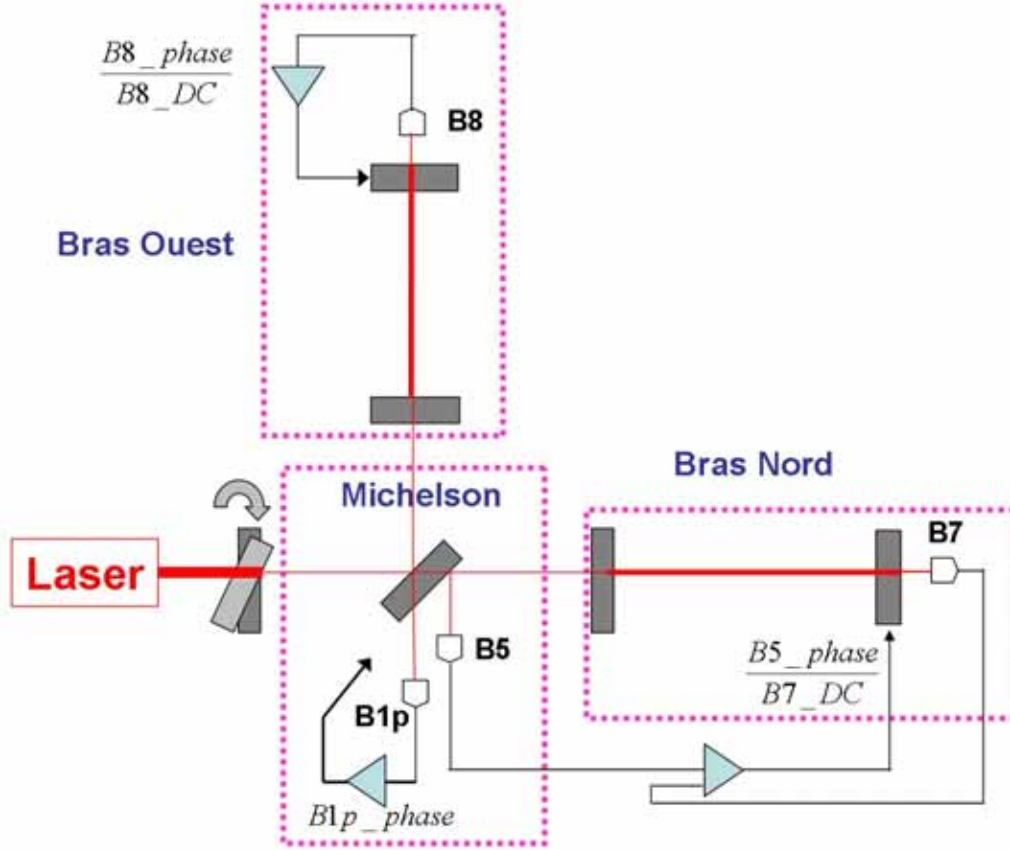


FIG. 4.26: Représentation schématique du recombiné et du système de lock adopté.

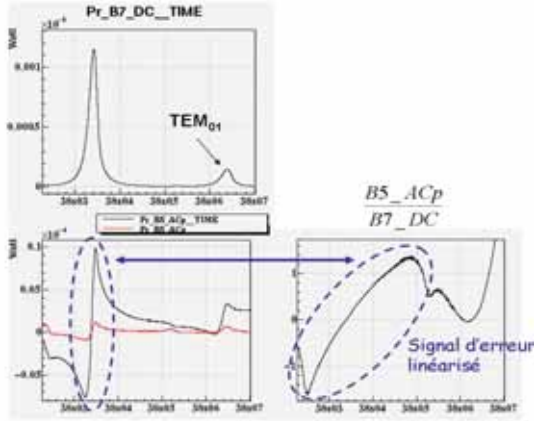
### Les signaux d'erreurs

Pour chacune des longueurs à contrôler différents signaux d'erreurs sont utilisés.

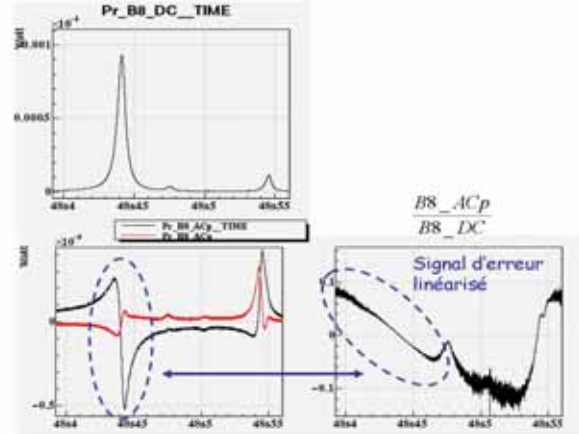
- La longueur NARM est contrôlée à partir du signal d'erreur en phase démodulé à  $\Omega$ , B5\_ACp. Nous n'utilisons pas le signal d'erreur B7\_ACp car celui-ci est plus bruité que le signal B5\_ACp.
- La longueur WARM est contrôlée à partir du signal d'erreur en phase démodulé à  $\Omega$ , B8\_ACp.
- La longueur MICH est contrôlée à partir du signal d'erreur en phase démodulé à  $\Omega$ , B1p\_ACp.

### La Linéarisation

Nous utilisons la technique de linéarisation des signaux d'erreurs. Les signaux d'erreurs employés pour locker les cavités Fabry-Perot sont divisés par les puissances mesurées en sortie de ces dernières. Les figures 4.27 et 4.28 présentent l'effet de la linéarisation sur les signaux d'erreurs respectifs B5\_ACp et B8\_ACp. Grâce à cette technique, nous avons élargi la région linéaire d'un facteur 10.



**FIG. 4.27:** Signaux utilisés pour le lock de la cavité Fabry-Perot du bras Nord.



**FIG. 4.28:** Signaux utilisés pour le lock de la cavité Fabry-Perot du bras Ouest.

Nous pouvons remarquer que le signal B8\_ACp est plus bruité que celui pour le bras Nord B5\_ACp car la photodiode B8 reçoit la lumière transmise par le miroir de haute réflectivité NE. Le lock sera donc plus facilement perturbé par les variations de puissance dans la cavité Ouest. Le signal d'erreur B1p\_ACp sensible à la longueur du Michelson n'est pas linearisé car cette opération n'a que peu d'effet sur l'élargissement de la région linéaire.

### Acquisition du lock des deux cavités Fabry-Perot

Par l'intermédiaire de ces signaux d'erreurs, nous avons contrôlé les deux cavités Fabry-Perot comme l'illustre la figure 4.29. Comme attendu, le signal de correction (Sc\_WE\_zCorr) utilisé pour le contrôle de la cavité Ouest est plus bruité que son équivalent du bras Nord (Sc\_NE\_zCorr). Le contrôle des deux cavités est stable sur une très longue durée (plusieurs heures) et sa durée de vie dépend de l'activité sismique sur le site mais également de la dérive des contrôles locaux.

### Acquisition du lock de l'interféromètre recombiné

La dernière étape consiste à locker le Michelson sur la frange noire. La figure 4.30 illustre les signaux employés pour le lock du Michelson. Le gain optique du Michelson utile à la reconstruction de la longueur MICH est obtenu à partir de la relation suivante :

$$\text{Gain\_Optique\_Michelson} = A \frac{4\pi}{\lambda} \quad (4.9)$$

où A mesure l'amplitude du signal d'erreur B1p\_ACp (voir figure 4.30), et  $\lambda$  est la longueur d'onde.

Nous pouvons voir sur la figure 4.31 le moment où le lock du Michelson est acquis et par voie de conséquence le mode recombiné. Nous mesurons une différence de 12 % entre les puissances en sortie de chacun des bras dont l'origine n'est pas clairement identifiée (optique du banc de détection, calibration, caractéristiques des miroirs des cavités Fabry-Perot...).

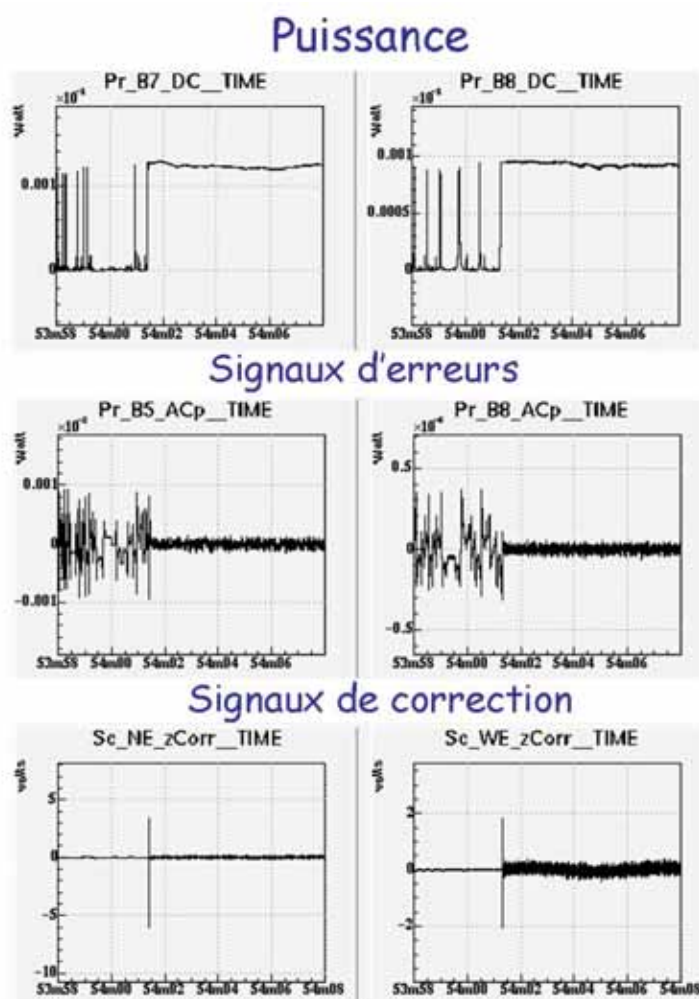


FIG. 4.29: Acquisition du lock des deux cavités Fabry-Perot Nord et Ouest.

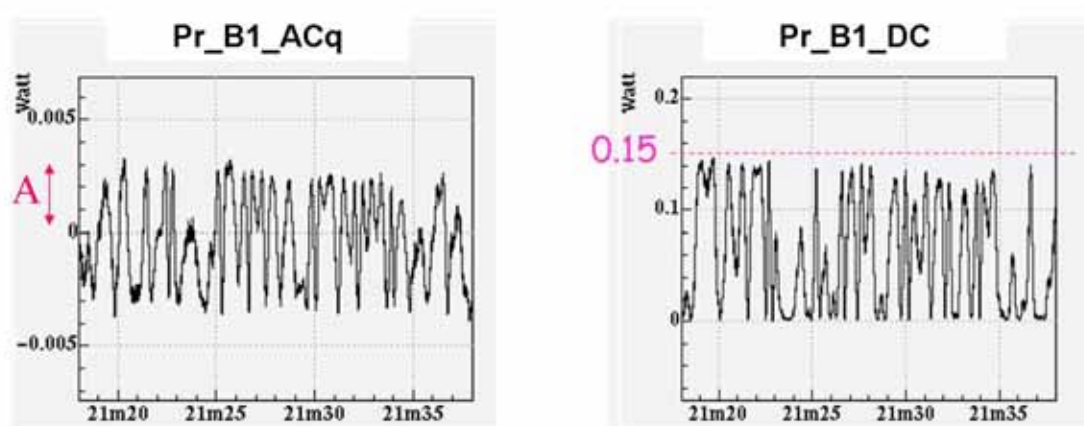
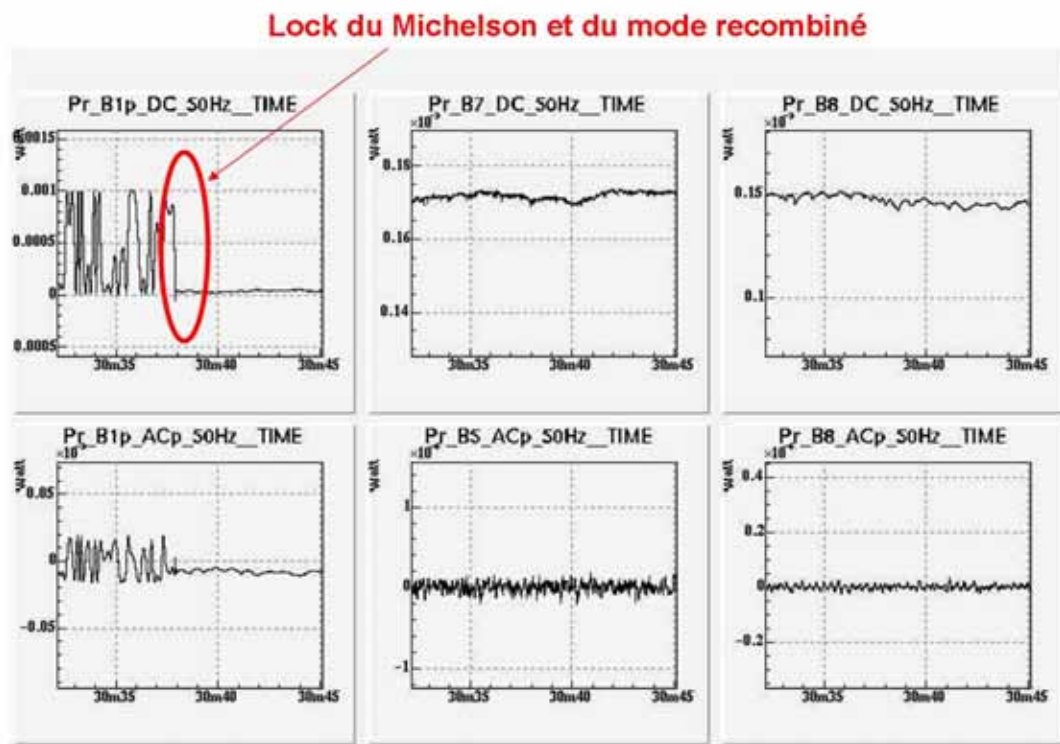


FIG. 4.30: Signaux employés pour le lock du Michelson.



**FIG. 4.31:** Lock de l'interféromètre recombiné.

Les signaux B1p\_DC et B1\_DC mesurent le signal de frange noire du Michelson. La valeur maximale et minimale mesurée sur B1\_DC est de 0.15 W et 0.5 mW, ainsi le contraste du Michelson est :

$$C = \frac{B1\_DC_{max} - B1\_DC_{min}}{B1\_DC_{max} + B1\_DC_{min}} \sim 0.993 \quad (4.10)$$

Le contraste est bon mais dépend énormément des fluctuations d'alignement des cavités Fabry-Perot.

### Le filtre de compensation

Le filtre de compensation utilisé sur les trois boucles d'asservissement est le même que celui employé pour le lock des cavités Fabry-Perot (voir page 106).

### Statistique

Pour valider l'algorithme de lock du mode recombiné, nous avons effectué des transitions lock delock à plusieurs reprises. Le lock du mode recombiné est toujours acquis à la première tentative (voir figure 4.32). La durée typique de l'acquisition d'un lock est de quelques ms. La stabilité du contrôle de l'interféromètre recombiné est de plusieurs heures.

La collaboration a décidé de faire un nouveau run (C4) de tel sorte à analyser dans une configuration stable le comportement de l'interféromètre recombiné.



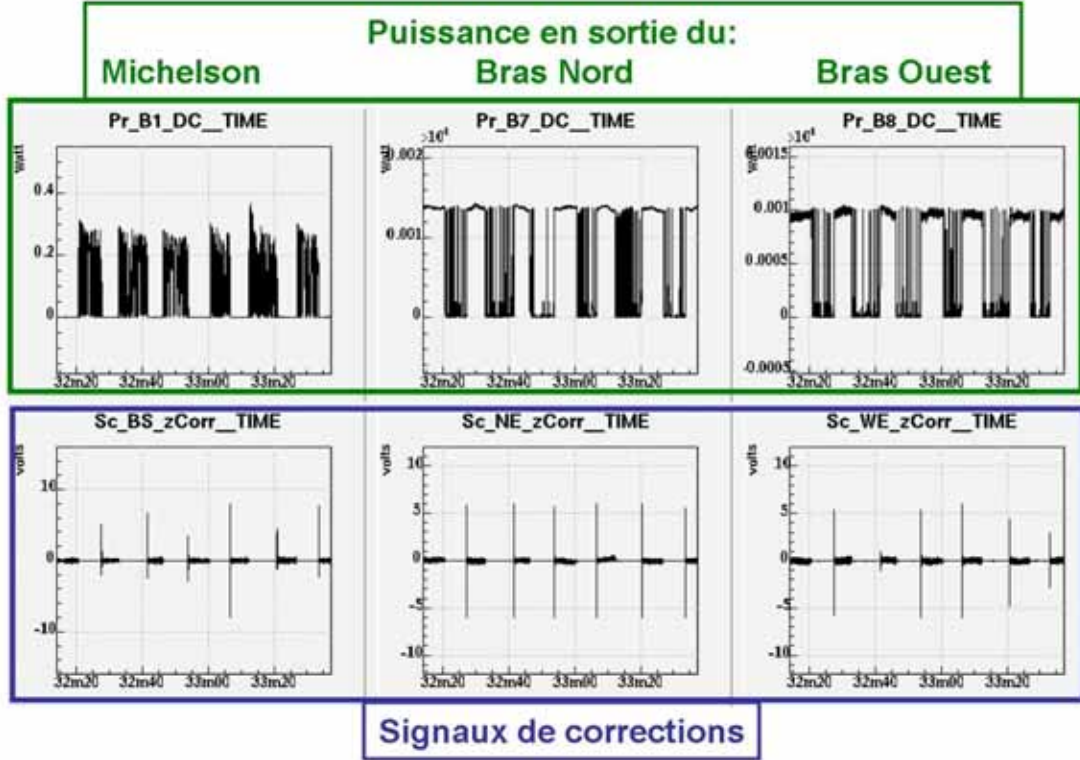


FIG. 4.32: Statistique de l'acquisition du lock du mode recombiné.

### 4.2.3 Le run C4

Le but de ce run est de collecter cinq jours (24 Juin 2004 au 29 Juin 2004) de données avec l'interféromètre locké dans le mode recombiné, avec le contrôle hierarchique (voir page 89), l'Alignement dans les deux bras et le second étage de stabilisation de fréquence.

Le lock est tout d'abord obtenu avec l'algorithme en trois étapes décrit précédemment. Pour utiliser la SSFS nous devons adopter une autre base de décomposition pour contrôler les différentes longueurs en considérant les mouvements différentiel et commun des bras. Nous faisons alors le changement de variable suivant :

$$\text{CARM} = \text{NARM} + \text{WARM}$$

$$\text{DARM} = \text{NARM} - \text{WARM}$$

La matrice de répartition des corrections pour le contrôle des différentes longueurs devient :

$$\begin{pmatrix} Z_{BS} \\ Z_{NE} \\ Z_{WE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{DARM} \\ \text{CARM} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Nous avons également modifié dans cette phase les signaux d'erreurs utilisés pour le lock. La matrice optique pour le contrôle des trois longueurs que nous avons utilisée est devenue :

$$\begin{pmatrix} \text{B2\_ACq} \\ \text{B1p\_ACp} \\ \text{B2\_ACp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\text{B2\_ACq}}^{\text{MICH}} & 0 & 0 \\ 0 & G_{\text{B1p\_ACp}}^{\text{DARM}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\text{B2\_ACp}}^{\text{CARM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{DARM} \\ \text{CARM} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

## 4.2. L'INTERFÉROMÈTRE RECOMBINÉ

avec :

$$\begin{aligned} G_{B2\_ACp}^{CARM} &= g_{B2\_ACp}^{CARM} B7\_DC \\ G_{B1p\_ACp}^{DARM} &= g_{B1p\_ACp}^{DARM} B8\_DC \end{aligned}$$

Nous identifions par un grand G, par exemple  $G_{B2\_ACp}^{CARM}$ , un gain dynamique alors que un petit g, par exemple  $g_{B2\_ACp}^{CARM}$ , désigne le gain optique constant.

Les signaux d'erreurs B2\_ACq et B2\_ACp sont respectivement utilisés pour contrôler la longueur du Michelson (MICH) et le mode commun des bras (CARM). Nous utilisons les signaux d'erreurs de la photodiode B2 car la puissance qu'elle reçoit est plus élevée. À partir du moment où nous enclenchons la SSFS le mode commun des bras est contrôlé en agissant sur le laser. Le signal B1p\_ACp est utilisé pour le contrôle du mode différentiel des bras. Dès lors que le mode cleaner de sortie est locké sur le mode TEM<sub>00</sub>, nous remplaçons le signal d'erreur B1p\_ACp par le signal d'erreur après le mode cleaner de sortie B1\_ACp pour contrôler le mode différentiel des bras (DARM). La longueur DARM correspond au canal de l'onde gravitationnelle, ainsi la contrainte sur cette longueur est la plus forte et correspond à 10<sup>-12</sup>m RMS.

Le mode recombiné de Virgo a été locké pendant près de 80% du run C4 comme l'illustre la figure 4.33. La durée du plus long lock a été de 28 h 50.

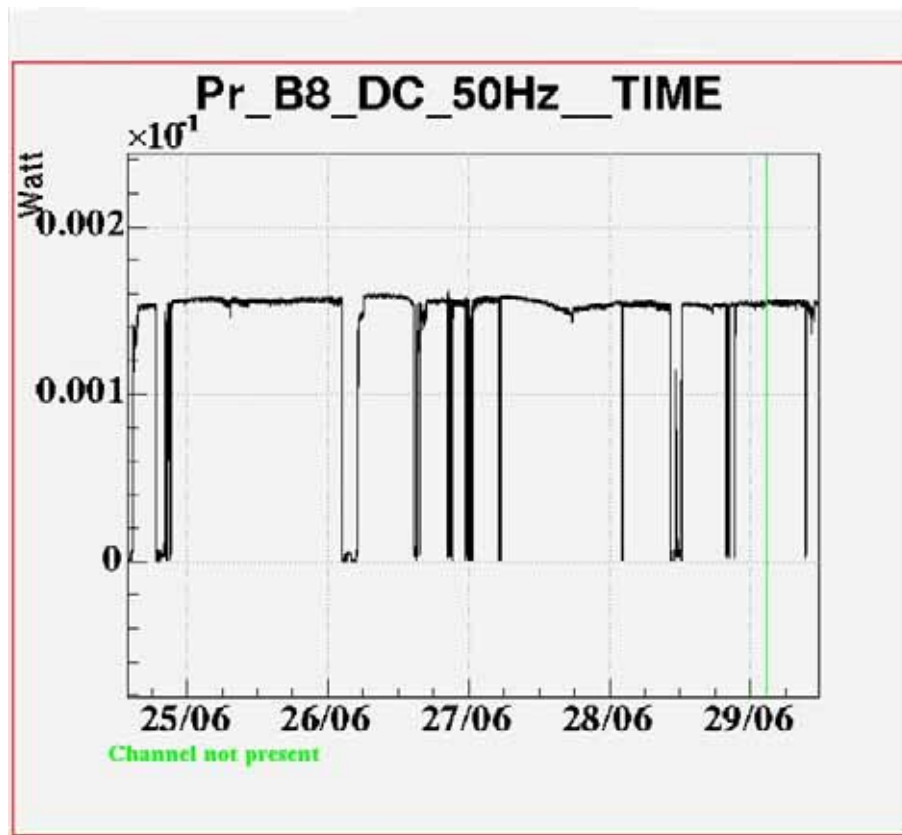
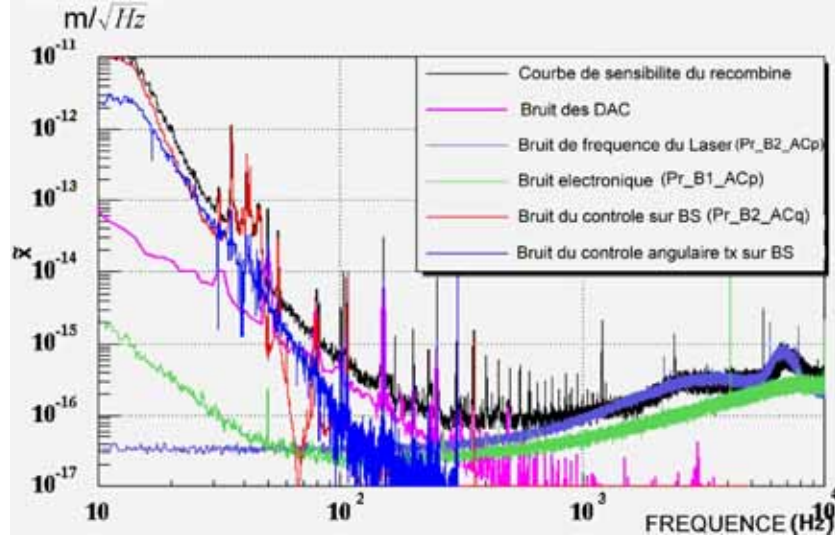


FIG. 4.33: Evolution de la puissance sur le signal B8\_DC lors du run C4.



**FIG. 4.34:** Courbe de sensibilité du mode recombiné ainsi que la contribution des différents bruit lors du run C4.

La figure 4.34 présente la courbe de sensibilité de Virgo en mode recombiné lors de ce run. La sensibilité est au mieux de  $3 \times 10^{-20}/\sqrt{\text{Hz}}$  autour de 150 Hz. À basse fréquence, nous sommes limités par les bruits générés par les contrôles agissant sur le miroir BS. À haute fréquence, le facteur limitant est le bruit de fréquence du laser. Les progrès à effectuer pour améliorer la sensibilité :

- la réduction du bruit de fréquence du laser en augmentant la puissance de la lumière arrivant sur la photodiode B2 ;
- la diminution du bruit sur la photodiode B1 sera obtenue en augmentant la puissance arrivant sur cette photodiode ;
- le bruit sur le contrôle angulaire sera réduit dès que nous posséderons un contrôle angulaire global de l'interféromètre ;
- le bruit des DAC sera réduit par l'utilisation des bobines fonctionnant en régime bas gain ;
- la réduction du bruit introduit par le contrôle de la longueur du Michelson peut être obtenue en ajustant le filtre de compensation ;
- les résonances à 30 Hz sont introduites par le bruit de contrôle du mode cleaner d'entrée qui affecte la fréquence du laser entrant dans l'interféromètre. Un ajustement de la boucle de contrôle sera nécessaire.

Beaucoup de ces améliorations seront apportées par l'augmentation de la puissance des faisceaux arrivant sur les différentes photodiodes. Puisque dans le cas de Virgo, la puissance arrivant sur la séparatrice est multiplié d'un facteur 160 par rapport à l'interféromètre recombiné, nous aurons plus de puissance sur les photodiodes et la sensibilité sera améliorée.

# Chapitre 5

## L'acquisition du lock de VIRGO

Dans le cas de Virgo, nous avons quatre longueurs à contrôler. Dans ce chapitre, nous allons expliciter la matrice optique de Virgo, qui évalue la dépendance de chacun des signaux d'erreurs pour chacune des longueurs caractéristiques de l'instrument. Puis, nous généralisons la technique de linéarisation des signaux d'erreurs définie dans le chapitre 3. À partir de là, nous avons développé deux méthodes pour acquérir le lock de VIRGO. L'un de ces algorithmes reprend le travail effectué par la collaboration LIGO. Lors de son expérimentation, nous avons rencontré des problèmes induits par les caractéristiques optiques et mécaniques de l'interféromètre. Nous nous sommes ensuite appuyé sur l'expérience acquise sur l'acquisition du lock du mode recombinaison pour élaborer un nouvel algorithme.

### 5.1 Un système plus complexe : VIRGO

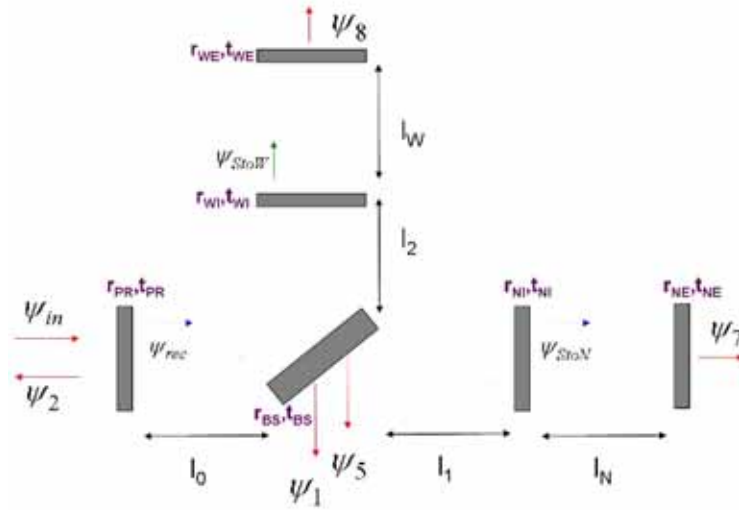


FIG. 5.1: Représentation des champs circulant dans l'interféromètre Virgo.

Sur la figure 5.1, sont présentés les principaux champs circulant dans l'interféromètre. Nous définissons par  $l_0$  la longueur séparant les miroirs PR et BS.  $l_1$  mesure la longueur entre les miroir BS et NI et  $l_2$  celle entre les miroirs BS et WI. Nous appelons  $l_N$  et  $l_W$  respectivement les longueurs des cavités Fabry-Perot Nord et Ouest.

Nous allons expliciter chacun des champs incidents sur les photodiodes en fonction du champ de recyclage  $\psi_{rec}$  car celui-ci est responsable du couplage de tous les signaux :

$$\psi_{rec} = \frac{t_{PR}}{1 + r_{PR} e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} (r_{FP_N}(\omega) t_{BS}^2 e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} - r_{FP_W}(\omega) r_{BS}^2 e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l})} \psi_{in} \quad (5.1)$$

$$\psi_1 = -r_{BS} t_{BS} e^{-i\frac{\omega}{c}l_0} e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} (r_{FP_N}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} + r_{FP_W}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l}) \psi_{rec} \quad (5.2)$$

$$\psi_2 = \frac{i}{t_{PR}} [r_{PR} + e^{-2i\frac{\omega}{c}l_r} (r_{FP_N}(\omega) t_{BS}^2 e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} - r_{FP_W}(\omega) r_{BS}^2 e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l})] \psi_{rec} \quad (5.3)$$

$$\psi_5 = i r_{BS}^{(II)} r_{FP_N}(\omega) t_{BS} e^{-i\frac{\omega}{c}(2l_1 + l_0)} \psi_{rec} \quad (5.4)$$

$$\psi_7 = t_{NE} \frac{t_{NI}}{1 + r_{NI} r_{NE} e^{-2i\frac{\omega}{c}l_N}} t_{BS} e^{-i\frac{\omega}{c}(l_0 + l_1)} \psi_{rec} \quad (5.5)$$

$$\psi_8 = t_{WE} \frac{t_{WI}}{1 + r_{WI} r_{WE} e^{-2i\frac{\omega}{c}l_W}} i r_{BS} e^{-i\frac{\omega}{c}(l_0 + l_2)} \psi_{rec} \quad (5.6)$$

avec  $l_r = l_0 + \frac{l_1 + l_2}{2}$  la longueur de recyclage,  $\Delta l = l_2 - l_1$  la différence de longueur entre chaque bras du Michelson et  $r_{BS}^{(II)}$  la réflectivité de la seconde face de la séparatrice.

À partir de ces champs, nous évaluons les signaux d'erreurs. Ceux-ci dépendent de deux types de mouvement que nous appelons différentiel et commun. Les modes différentiels sont appelés DARM (mouvement en opposition de phase des miroirs de fond des cavités Fabry-Perot) et MICH et les modes communs PRCL et CARM (mouvement en phase des miroirs de fond des cavités Fabry-Perot). La longueur supplémentaire à contrôler par rapport au mode recombinaison est la longueur de recyclage PRCL.

La matrice qui définit chacune de ces quantités en fonction de la convention de longueur adoptée sur la figure 5.1 est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \\ \text{DARM} \\ \text{CARM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 - l_1 \\ l_0 + \frac{l_1 + l_2}{2} \\ l_N - l_W \\ l_N + l_W \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

### La matrice optique théorique

Chaque photodiode est plus ou moins sensible aux différentes longueurs caractéristiques de Virgo. La matrice optique explicite cette dépendance :

$$(\text{Signal d'erreur}) = (\text{Matrice optique}) (\text{Variation de longueur}) \quad (5.8)$$

Pour établir cette matrice optique, nous nous sommes basés sur les résultats présentés dans les références [78] et [79]. Les signaux d'erreurs sont exprimés selon les conventions suivantes :

- seuls les signaux d'erreurs obtenus par une démodulation à la fréquence de modulation  $\Omega$  sont présentés ;
- les termes en cosinus sont en phase et ceux en sinus en quadrature.

Avant de détailler la matrice optique, nous allons définir différentes quantités. Tous les signaux d'erreurs dépendent du battement entre la porteuse et les bandes latérales (BL). Leurs comportements évoluent en fonction de leur gain de recyclage, de la réflectivité de la cavité de recyclage et des cavités Fabry-Perot.

Pour la porteuse.

- Nous définissons la réflectivité complexe de chacune des cavités Fabry-Perot par :

$$r_{\text{Cavité}} = \frac{r_1 + \alpha r_2}{1 + \alpha r_1 r_2} \quad (5.9)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les réflectivités des miroirs d'entrée et de fond des cavités Fabry-Perot (considérées comme égales entre les cavités). Le paramètre  $\alpha$  est égal à 1 ou -1 si la porteuse est respectivement antirésonante ou résonante dans la cavité Fabry-Perot.

- La dérivée du champ réfléchi par rapport à la phase du champ entrant dans la cavité Fabry-Perot s'écrit (voir Annexe A) :

$$r'_{\text{Porteuse}} = \frac{(1 - r_1^2) r_2}{(1 + \alpha r_1 r_2)^2} \quad (5.10)$$

- La cavité de recyclage peut être assimilée à une cavité Fabry-Perot dont le miroir d'entrée est le miroir de recyclage et le miroir de fond le miroir équivalent du Michelson. Nous définissons alors la réflectivité et la transmittivité en amplitude de la cavité de recyclage :

$$r_{\text{Porteuse}} = \frac{r_{PR} + r_{\text{Cavité}}}{1 + r_{PR} r_{\text{Cavité}}}, \quad t_{\text{Porteuse}}^2 = 1 - r_{\text{Porteuse}}^2 \quad (5.11)$$

- Nous définissons le gain de recyclage en amplitude :

$$g_{\text{Porteuse}} = \frac{t_{PR}}{1 + r_{PR} r_{\text{Cavité}}} \quad (5.12)$$

Nous pouvons définir des termes équivalents pour les BL.

- La réflectivité du miroir équivalent au Michelson  $r_{\text{Michelson}}$  qui prend en compte la réflectivité complexe des cavités Fabry-Perot dépend uniquement de l'asymétrie macroscopique (asymétrie de Schnupp) entre la longueur de chaque bras de l'interféromètre de Michelson, soit :

$$r_{\text{Michelson}} = \cos\left(\frac{2\Omega}{c} \Delta l\right) r_1 \quad (5.13)$$

- La dérivée du champ réfléchi par rapport à la phase introduite par les cavités Fabry-Perot s'écrit :

$$r'_{BL} = \frac{(1 - r_1^2) r_2}{(1 + r_1 r_2)^2} \quad (5.14)$$

- Nous définissons la réflectivité et la transmittivité en amplitude de la cavité de recyclage pour les BL :

$$r_{BL} = \frac{r_{PR} - r_{Michelson}}{1 - r_{PR} r_{Michelson}}, \quad t_{BL} = \frac{t_{PR} \sqrt{1 - r_{Michelson}^2}}{1 - r_{PR} r_{Michelson}} \quad (5.15)$$

Il est nécessaire pour mesurer le passage de l'onde gravitationnelle que les bandes latérales ne soient pas sur la frange noire. Donc, la lumière qui sort de l'interféromètre peut être considérée comme un terme de perte. Ainsi, à la différence de la porteuse, nous avons  $r_{BL}^2 + r_{BL}^2 < 1$ .

- Nous définissons le gain de recyclage en amplitude pour les BL :

$$g_{BL} = \frac{t_{PR}}{1 - r_{PR} r_{Michelson}} \quad (5.16)$$

Par ailleurs, il est nécessaire de définir le pôle des cavités Fabry-Perot des bras  $s_c$  et le pôle de la double cavité (cavité de recyclage + cavité Fabry-Perot)  $s_{cc}$  par :

$$s_c = i \frac{\omega}{\omega_c} \text{ avec } \omega_c = \frac{\pi c}{2 \mathcal{FL}} \sim 2\pi \times 500 \text{ Hz} \quad (5.17)$$

$$s_{cc} = i \frac{\omega}{\omega_{cc}} \text{ avec } \omega_{cc} = \frac{1 + r_{PR} r_{Cavité}}{1 + r_{PR}} \sim 2\pi \times 10 \text{ Hz} \quad (5.18)$$

Nous définissons également les zéros sensibles à l'évolution du gain de recyclage de la porteuse et des bandes latérales :

$$s_r = i \frac{\omega}{\omega_r} \text{ et } \omega_r = \left( 1 + \frac{g_{Porteuse}^2 r_{BL} r_{Cavité}}{g_{BL}^2 r_{Porteuse} r_{Michelson}} \right) \omega_{cc} \quad (5.19)$$

$$s_p = i \frac{\omega}{\omega_p} \text{ et } \omega_p = \left( 1 - \frac{g_{Porteuse}}{g_{BL}} \right) \omega_{cc} \quad (5.20)$$

Un autre terme qui va intervenir dans l'écriture des signaux d'erreurs est le coefficient  $S_0 = 2 J_0(m) J_1(m) P$  proportionnel à la puissance  $P$  du faisceau laser.

Nous allons à l'aide de ces différentes quantités pouvoir exprimer la matrice optique de Virgo.

La photodiode B1 placée sur le port antisymétrique de l'interféromètre mesure le signal de frange noire. Ce signal est uniquement sensible au mouvement différentiel des bras et à la différence de longueur des bras du Michelson. Il s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{B1}}{S_0} = & - 4 g_{Porteuse} t_{BL} r'_{Porteuse} \frac{\omega_0}{c} \frac{1}{1 + s_c} \text{DARM} \sin(\Omega t) \\ & + 4 g_{Porteuse} t_{BL} r_{Cavité} \frac{\omega_0}{c} \frac{1}{1 + s_c} \text{MICH} \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Les deux composantes du signal d'erreur sont en quadrature et sont filtrés par le pôle de la cavité Fabry-Perot.

En ce qui concerne le signal mesuré par la photodiode B2 sur le port symétrique, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{B2}}{S_0} = & - 4 g_{BL} t_{BL} r_{Porteuse} r'_{BL} \frac{\omega_0}{c} \text{DARM} \sin(\Omega t) \\ & - 4 g_{BL} t_{BL} r_{Porteuse} \frac{\omega_0}{c} \text{MICH} \sin(\Omega t) \\ & + 4 g_{Porteuse}^2 r_{BL} r'_{Porteuse} \frac{\omega_0}{c} \frac{1}{1 + s_{cc}} \text{CARM} \cos(\Omega t) \\ & - 4 (g_{Porteuse}^2 r_{BL} r_{Cavité} + g_{BL}^2 r_{Porteuse} r_{Michelson}) \frac{\omega_0}{c} \frac{1 + s_r}{1 + s_{cc}} \text{PRCL} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Nous pouvons voir sur ce signal que les modes communs et différentiels sont clairement différenciés en phase et en quadrature. Les signaux dépendant des modes différentiels (DARM et MICH) ne sont pas filtrés par les pôles  $s_c$  et  $s_{cc}$ . Si la cavité de recyclage est optimalement couplée ( $r_{Porteuse} = 0$ ) (voir Annexe A), ces signaux sont nuls. Par contre, les modes communs (CARM et PRCL) sont affectés par la réponse fréquentiel du système. Nous pouvons voir également que lorsque l'égalité suivante  $\frac{g_{Porteuse}^2 r_{BL} r_{Cavité}}{g_{BL}^2 r_{Porteuse} r_{Michelson}} = -1$  est vérifiée, le signal d'erreur n'est plus sensible à la longueur PRCL.

Au niveau de la photodiode B5, la situation est semblable à celle rencontrée sur la photodiode B2 :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{B5}}{S_0} = & + 4 \frac{g_{Porteuse} g_{BL}}{t_{PR}} t_{BL} r'_{BL} \frac{\omega_0}{c} \text{DARM} \sin(\Omega t) \\ & + 4 \frac{g_{Porteuse} g_{BL}}{t_{PR}} t_{BL} \frac{\omega_0}{c} \text{MICH} \sin(\Omega t) \\ & - 4 \frac{g_{Porteuse}^2 g_{BL}}{t_{PR}} r_{Michelson} r'_{Cavité} \frac{\omega_0}{c} \frac{1}{1 + s_{cc}} \text{CARM} \cos(\Omega t) \\ & + 4 \frac{g_{Porteuse} g_{BL}}{t_{PR}} (g_{Porteuse} - g_{BL}) \frac{\omega_0}{c} \frac{1 + s_p}{1 + s_{cc}} \text{PRCL} \cos(\Omega t) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Quelques différences existent cependant entre les signaux d'erreurs produits par les photodiodes B2 et B5. Le terme sensible à la longueur MICH ne dépend plus du couplage de la porteuse dans l'interféromètre. Si la cavité est optimalement couplée ce terme est tout de même non nul.

Le facteur dépendant de la longueur de recyclage est fonction de la différence entre le gain de recyclage en amplitude de la porteuse et des bandes latérales.



Dans le cas où  $g_{\text{Porteuse}} = g_{\text{BL}}$ , cette quantité est nulle et nous n'avons plus d'information sur la longueur PRCL.

En ce qui concerne les signaux d'erreurs sur B7 et B8, ceux ci sont comparables au signal d'erreur B5.

L'expression de chacun des signaux d'erreurs met en avant leur dépendance et leur dynamique par rapport aux longueurs caractéristiques à contrôler. Nous pouvons de cette façon choisir quels signaux d'erreurs nous voulons employer dans l'algorithme d'acquisition du lock de Virgo.

## 5.2 Acquisition du lock multi-étape

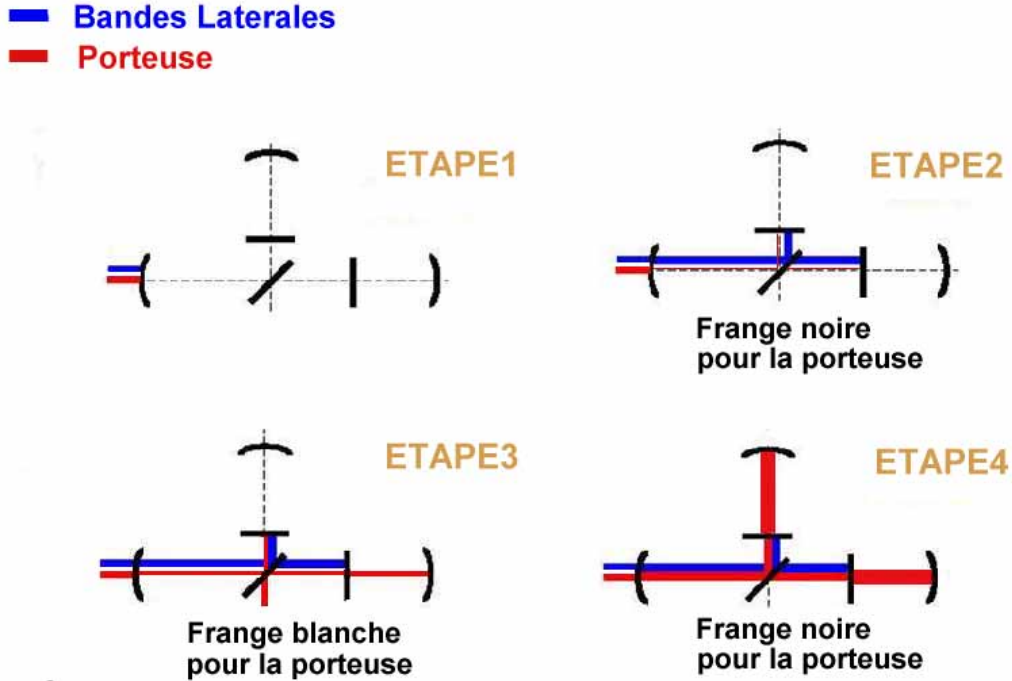


FIG. 5.2: Stratégie en quatre étapes de l'acquisition du lock de Virgo. L'amplification des champs de la porteuse et des BL est illustrée par l'épaisseur des traits correspondant.

Dans cette partie, une étude de la stratégie d'acquisition du lock et de son expérimentation est présentée. Cette stratégie s'inspire de celle adoptée par la collaboration LIGO [80]. Elle utilise un algorithme dont la matrice optique évolue de manière dynamique et permet de suivre l'état de l'interféromètre. L'acquisition du lock est composée de 4 étapes (voir figure 5.2) :

- Etape1 : l'interféromètre est libre.

- Etape2 : deux degrés de liberté sont contrôlés, la longueur de recyclage (PRCL) et la différence de longueur des bras du Michelson (MICH). Les BL sont résonantes et la porteuse antirésonante dans la cavité de recyclage. La porteuse et les BL sont hors résonance dans les deux cavités Fabry-Perot. L'interféromètre de Michelson est sur la frange noire pour la porteuse.
- Etape3 : trois degrés de liberté sont contrôlés : les précédentes longueurs et l'une des deux cavités Fabry-Perot. Les BL sont résonantes et la porteuse hors résonance dans la cavité de recyclage. La porteuse est résonante dans une cavité Fabry-Perot et les BL sont hors résonance dans les deux cavités Fabry-Perot. L'interféromètre de Michelson est sur la frange blanche pour la porteuse.
- Etape4 : tous les degrés de liberté de l'interféromètre sont contrôlés. La porteuse et les BL sont résonantes dans la cavité de recyclage. La porteuse est résonante et les BL antirésonantes dans les cavités Fabry-Perot. L'interféromètre de Michelson est sur la frange noire pour la porteuse.

Remarquons qu'à l'Etape2, nous sommes sur la frange noire pour la porteuse, condition essentielle pour la détection de l'onde gravitationnelle. Le déphasage introduit par le passage à la résonance de la porteuse dans les cavités Fabry-Perot (Etape3 puis Etape4) va permettre de rendre la porteuse résonante dans la cavité de recyclage. Nous serons alors sur le point de fonctionnement de l'interféromètre.

Dans cet algorithme, l'acquisition du lock se fait par le contrôle successif de l'Etape2 puis de l'Etape3 et enfin de l'Etape4. Le passage entre les étapes dépend du comportement des BL dans les cavités Fabry-Perot car si elles deviennent résonantes dans une de ces cavités nous perdons le lock des Etape2 ou Etape3. Ainsi, ces étapes sont instables. Nous parlons alors d'un algorithme d'acquisition du lock de nature itératif car la perte du lock à l'une de ces étapes nécessite de reprendre le cycle d'acquisition du lock depuis le début.

### 5.2.1 Estimation des paramètres pour la linéarisation

La dépendance de chaque signal d'erreur en fonction des longueurs caractéristiques varie de manière dynamique. Comme nous l'avons vu plus haut, différentes quantités entrent en jeu pour établir la dépendance de chacun des signaux d'erreurs. Ces paramètres sont évalués expérimentalement. Nous avons vu à la page 78 du chapitre 3 comment est estimé le coefficient de proportionnalité entre la longueur de la cavité Fabry-Perot à contrôler et le signal d'erreur. Nous généralisons cette technique à la matrice optique de Virgo [80] à partir de la relation suivante :

$$M_p^q = \sum_{g_m} \frac{|\psi_{stom}|^2}{\psi_{EnC_m}} \psi_{OL_l} \text{ avec } |l - m| = 1 \quad (5.24)$$

Les indices p et q indiquent respectivement la photodiode utilisée pour obtenir le signal d'erreur et la longueur à contrôler.  $\psi_{stom}$  est le champ intracavité,  $\psi_{EnC_m}$  est le champ entrant dans la cavité optique et  $\psi_{OL_l}$  est l'oscillateur local, en général le champ qui est antirésonant dans la cavité optique considérée.

De manière plus didactique, les principes de cette linéarisation sont les suivants :

- pour estimer la puissance intra-cavité, nous utilisons les signaux en DC ou un signal équivalent produits par les photodiodes ;
- pour estimer les champs, nous utilisons la racine carrée du signal en DC ou d'un signal équivalent ;
- nous considérons que les mouvements modes communs (CARM et PRCL) n'affectent que les signaux d'erreurs obtenus en phase comme nous l'avons vu plus haut. Expérimentalement, la contribution du mouvement CARM (signal le plus fort) peut se retrouver sur l'autre phase. Donc, à proximité du point de fonctionnement, nous emmenons artificiellement le gain optique de la longueur CARM sur le signal d'erreur en quadrature à zéro. Pour cela, nous linéarisons le signal d'erreur en quadrature par un terme évaluant la différence de puissance en sortie des bras. Ceci est effectué par l'intermédiaire du terme  $A_-$  (voir plus loin) ;
- nous considérons que les mouvements modes différentiels (DARM et MICH) ne sont visibles que par les signaux d'erreurs obtenus en quadrature. Nous appliquons la même technique que précédemment pour éliminer la composante DARM sur l'autre phase.

La matrice optique de Virgo est une extrapolation de la matrice optique suivante obtenue pour une photodiode :

$$\begin{pmatrix} ACp \\ ACq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G_{ACp}^{PRCL} & G_{ACp}^{DARM} & G_{ACp}^{CARM} \\ G_{ACq}^{MICH} & 0 & G_{ACq}^{DARM} & G_{ACq}^{CARM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \\ DARM \\ CARM \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Les différents éléments de la matrice optique 5.25 sont :

$$\begin{aligned} G_{ACq}^{MICH} &= g_{ACq}^{MICH} \psi_{Porteuse} A_{PR} \\ G_{ACp}^{PRCL} &= g_{ACp}^{PRCL} \psi_{Porteuse} A_{PR} \\ G_{ACp}^{DARM} &= g_{ACp}^{DARM} \psi_{BL} A_- \\ G_{ACq}^{DARM} &= g_{ACq}^{DARM} \psi_{BL} A_+ \\ G_{ACp}^{CARM} &= g_{ACp}^{CARM} \psi_{BL} A_+ \\ G_{ACq}^{CARM} &= g_{ACq}^{CARM} \psi_{BL} A_- \end{aligned}$$

Lorsque nous approchons du point de fonctionnement  $A_-$  tend vers zéro et la matrice optique devient :

$$\begin{pmatrix} ACp \\ ACq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G_{ACp}^{PRCL} & 0 & G_{ACp}^{CARM} \\ G_{ACq}^{MICH} & 0 & G_{ACq}^{DARM} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \\ DARM \\ CARM \end{pmatrix} \quad (5.26)$$


---

Explicitons les termes entrant en compte dans la dépendance de chaque coefficient de la matrice :

$$A_{\pm} = \frac{|\psi_{StoN}(\omega_0)|^2 \pm |\psi_{StoW}(\omega_0)|^2}{\psi_{rec}(\omega_0)} \quad (5.27)$$

$$A_{PR} = \frac{|\psi_{rec}(\omega_0 \pm \Omega)|^2}{\psi_{in}(\omega_0 \pm \Omega)} \quad (5.28)$$

### Estimation des champs de la matrice optique

La matrice optique est déterminée par une combinaison de champ résonant ( $A_{\pm}$  et  $A_{PR}$ ) et de champs locaux ( $\psi_{BL}$  et  $\psi_{Porteuse}$ ). Chacun de ces paramètres peut être estimé à partir des mesures.

#### *Estimation du paramètre $A_{\pm}$*

Pour estimer les puissances intracavités, nous utilisons les mesures en DC des photodiodes placées en sortie des bras :

$$|\psi_{StoN}(\omega_0)|^2 \sim \frac{B7\_DC}{B7\_DC_{max}} \quad (5.29)$$

$$|\psi_{StoW}(\omega_0)|^2 \sim \frac{B8\_DC}{B8\_DC_{max}} \quad (5.30)$$

Cette approximation est valable car les bandes latérales ne sont jamais résonantes durant l'acquisition du lock dans les cavités Fabry-Perot.

Le champ  $\psi_{rec}(\omega_0)$  est plus délicat à estimer car sa valeur dépend des étapes de l'acquisition du lock (voir figure 5.2). Dans l'approximation quasi statique et pour une porteuse parfaitement adaptée dans la cavité de recyclage, le champ de recyclage peut être estimé par :

$$\psi_{rec}(\omega_0) = \frac{t_{PR}}{1 - r_{PR} r_{MICH}(\omega_0)} \psi_{in}(\omega_0) \quad (5.31)$$

$r_{MICH}(\omega_0)$  est la réflectivité en amplitude du miroir équivalent du Michelson et des deux cavités Fabry-Perot. Cette réflectivité en amplitude est donnée par :

$$r_{MICH}(\omega_0) = r_{FPN}(\omega_0) e^{i \frac{\omega_0}{c} \Delta l} - r_{FPW}(\omega_0) e^{-i \frac{\omega_0}{c} \Delta l} \quad (5.32)$$

Quand les deux bras sont antirésonants ( $r_{FPN}(\omega_0) = r_{FPW}(\omega_0) \sim 1$ ) et que nous sommes sur la frange noire pour la porteuse  $r_{MICH}(\omega_0) \sim -1$  (Étape2), alors :

$$\psi_{rec}(\omega_0) \sim \frac{t_{PR}}{1 + r_{PR}} \psi_{in}(\omega_0) \quad (5.33)$$

Quand un des deux bras passe à la résonance pour la porteuse, la phase du champ réfléchi par la cavité Fabry-Perot est déphasée de  $\pi$ , ainsi nous avons  $r_{MICH}(\omega_0) = 0$  (Étape3), soit :

$$\psi_{rec}(\omega_0) = t_{PR} \psi_{in}(\omega_0) \quad (5.34)$$

Quand les deux bras sont résonants et que nous sommes sur la frange noire pour la porteuse  $r_{MICH}(\omega_0) \sim 1$  (Étape4), soit :

$$\psi_{rec}(\omega_0) \sim \frac{t_{PR}}{1 - r_{PR}} \psi_{in}(\omega_0) \quad (5.35)$$

Cependant, nous préférons utiliser comme estimateur du champ de la cavité de recyclage à l'Etape4 le champ arrivant sur les photodiodes placées en sortie des bras. En effet, nous avons :

$$|\psi_{rec}(\omega_0)| = \frac{1}{t_{BS}} \frac{1 - r_{NI} r_{NE}}{t_{NI}} \sqrt{B7\_DC} \quad (5.36)$$

$$|\psi_{rec}(\omega_0)| = \frac{1}{r_{BS}} \frac{1 - r_{WI} r_{WE}}{t_{WI}} \sqrt{B8\_DC} \quad (5.37)$$

Au départ, nous avons utilisé cette estimation du champ de recyclage en comparant les puissances B7\_DC et B8\_DC et en gardant le signal le plus fort. Par la suite, nous avons normalisé les signaux en DC par leur maximum de tel façon à être indépendant des modifications faites sur l'instrument. En ne prenant en compte que les paramètres dynamiques de cette relation, nous obtenons :

$$\psi_{rec}(\omega_0) \propto \sqrt{\frac{B7\_DC}{B7\_DC_{max}} + \frac{B8\_DC}{B8\_DC_{max}}} \quad (5.38)$$

#### *Estimation du paramètre $A_{PR}$*

Pour estimer le champ de recyclage pour les bandes latérales, nous utilisons le signal démodulé à  $2\Omega$  produit par la photodiode B5. Puisque le gain de recyclage de la porteuse multiplié par le gain de recyclage des BL du deuxième ordre est plus faible que le gain de recyclage des BL pondérés par leurs coefficients de Bessel respectifs, alors nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} S_{phase} \\ S_{quadrature} \end{pmatrix} \sim |\psi_0|^2 \begin{pmatrix} Im \\ Re \end{pmatrix} (-J_1^2 [F(\omega_0 + \Omega) F^*(\omega_0 - \Omega)]) \quad (5.39)$$

Si maintenant les deux bandes latérales résonnent de manière symétrique, la relation 5.39 peut se simplifier en :

$$\begin{pmatrix} S_{phase} \\ S_{quadrature} \end{pmatrix} \sim -J_1^2 |\psi_0|^2 \begin{pmatrix} Im \\ Re \end{pmatrix} (|F(\omega_0 + \Omega)|^2) \quad (5.40)$$

Nous avons alors l'équivalent d'un signal en DC pour les bandes latérales. Puisque ce signal est obtenu par démodulation, il est composé d'une partie en phase et une autre en quadrature. Un premier travail pour pouvoir utiliser ce signal comme estimateur du champ de recyclage des bandes latérales sera de déterminer la bonne phase de démodulation. Pour cela, nous modifions la phase de démodulation du signal B5\_2f de tel sorte à maximiser le rapport  $\frac{B5\_2f\_ACq}{B5\_2f\_ACp}$ . Dans le travail expérimental, nous utilisons B5\_2f\_ACq.

Alors, nous pouvons écrire :

$$|\psi_{rec}(\omega_0 \pm \Omega)|^2 \propto \frac{B5\_2f\_ACq}{B5\_2f\_ACq_{max}} \quad (5.41)$$

Nous avons de plus :

$$g_{rec}(\omega_0 \pm \Omega) = \frac{\psi_{rec}(\omega_0 \pm \Omega)}{\psi_{in}(\omega_0 \pm \Omega)} \quad (5.42)$$

$$g_{rec}(\omega_0 \pm \Omega) = \frac{t_{PR}}{1 - r_{PR} r_{MICH}(\omega_0 \pm \Omega)} \quad (5.43)$$


---

## 5.2. ACQUISITION DU LOCK MULTI-ÉTAPE

---

Par conséquent nous avons :

$$A_{PR} \sim \frac{t_{PR}}{1 - r_{PR} r_{MICH}(\omega_0 \pm \Omega)_{\text{théorique}}} \sqrt{B5\_2f\_ACq} \quad (5.44)$$

avec  $r_{MICH}(\omega_0 \pm \Omega)_{\text{théorique}} = r_{NI} \cos\left(\frac{2\Omega}{c} \Delta l\right)$ .

*Estimation des champs locaux*

En ce qui concerne l'estimation des champs locaux, nous utilisons pour les BL la relation suivante :

$$\psi_{BL} \sim \sqrt{B5\_2f\_ACq} \quad (5.45)$$

et pour la porteuse :

$$\psi_{\text{Porteuse}} \sim \sqrt{Bi\_DC} \quad (5.46)$$

où Bi correspond à la photodiode dont le signal d'erreur est issu.

Cependant, sur la photodiode B2, nous estimons les champs différemment car nous devons prendre en compte le champ réfléchi par l'interféromètre :

- Le champ local pour les BL est estimé par :

$$\begin{aligned} \psi_{B2_{BL}} &= r_{PR} \psi_{in}(\omega_0 \pm \Omega) + t_{PR} \psi_{rec}(\omega_0 \pm \Omega) \\ \psi_{B2_{BL}} &= r_{PR} J_1 \sqrt{P} + t_{PR} \sqrt{\frac{B5\_2f\_ACq}{B5\_2f\_ACq_{max}}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

- En ce qui concerne la porteuse, nous utilisons  $\psi_2(\omega_0) \sim J_0 \sqrt{P}$ .

### Les filtres de compensation

Les filtres de compensation utilisés pour le contrôle des longueurs MICH, PRCL et DARM sont les mêmes que ceux utilisés pour le lock des cavités Fabry-Perot et du mode recombinaison. Dans le cas de la longueur CARM, puisque le pôle de la cavité est à basse fréquence, nous avons placé un zéro à cette fréquence pour le compenser. Le reste du filtre est le même que pour les autres longueurs.

#### 5.2.2 La cavité PR-NI

A la différence des autres miroirs, le miroir PR est formé d'une structure composite (voir figure 5.3). Nous nous sommes donc intéressés à sa fonction de transfert mécanique. Nous avons pour cela locké la cavité optique PR-NI (voir figure 5.4). La technique d'acquisition du lock est la même que celle adoptée pour le lock des cavités Fabry-Perot des bras.

Nous utilisons le signal B1p\_AcP comme signal d'erreur. Ce signal est linéarisé par le signal B5\_DC. Celui-ci nous permet en plus de repérer le passage à la résonance de la porteuse dans la cavité. La figure 5.5 montre le lock de la cavité PR-NI. À partir de là, nous avons caractérisé la boucle d'asservissement à partir de sa FTBO (voir figure 5.6).

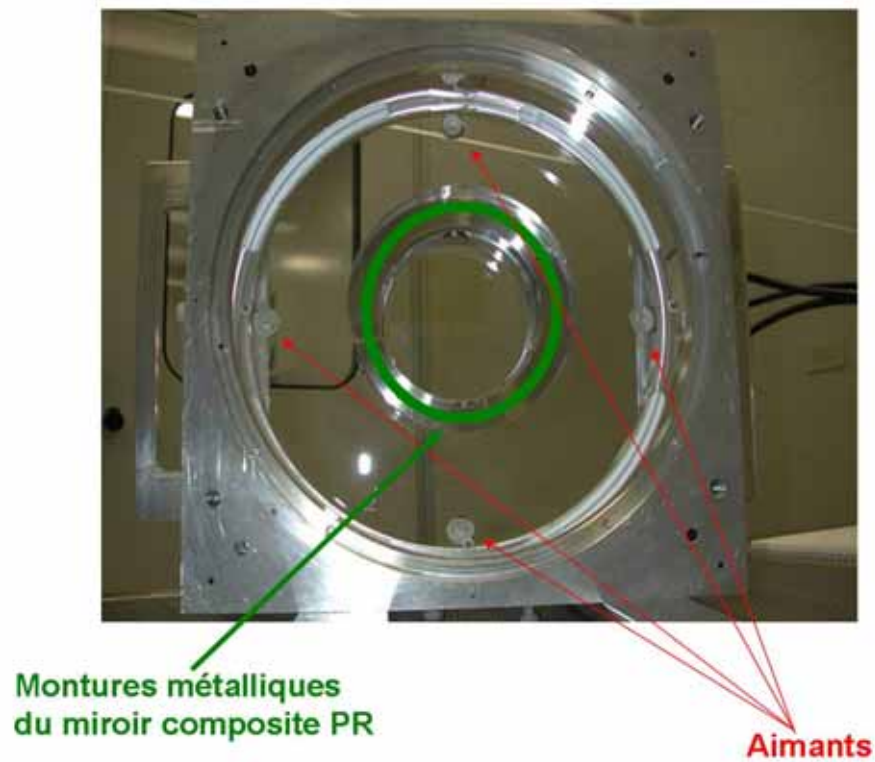


FIG. 5.3: Vue globale de la structure du miroir PR. Nous pouvons voir les quatres aimants ainsi que la lentille et la monture métallique qui entoure le miroir à proprement parler (cercle vert).

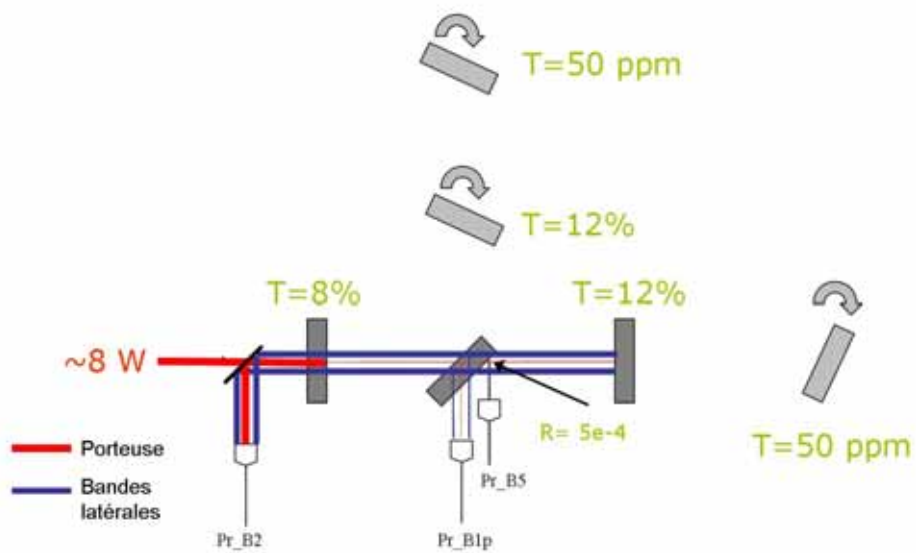


FIG. 5.4: Schéma de la cavité PR-NI.

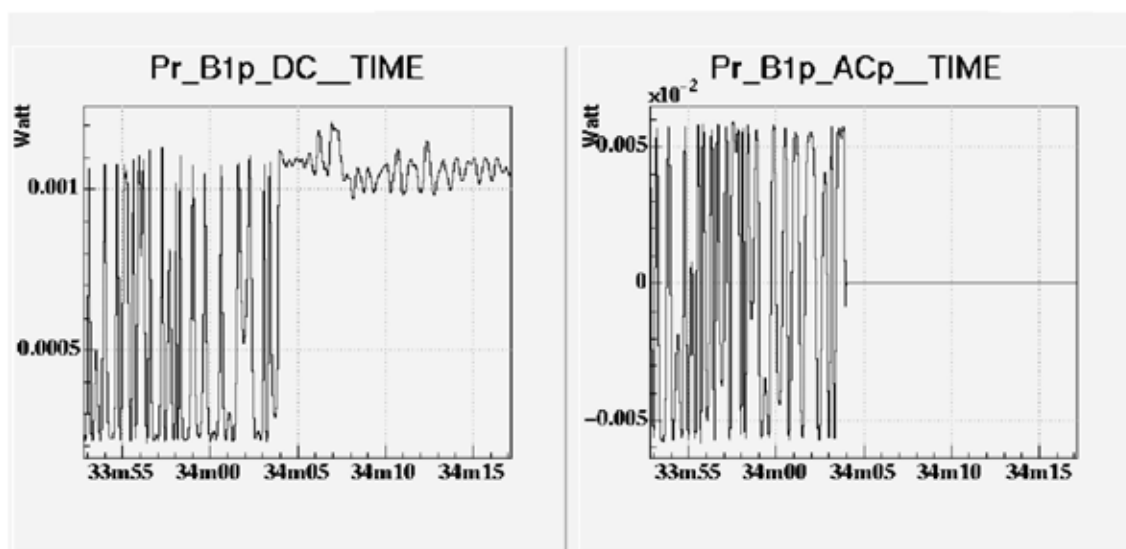


FIG. 5.5: Lock de la cavité PR-NI sur la porteuse.

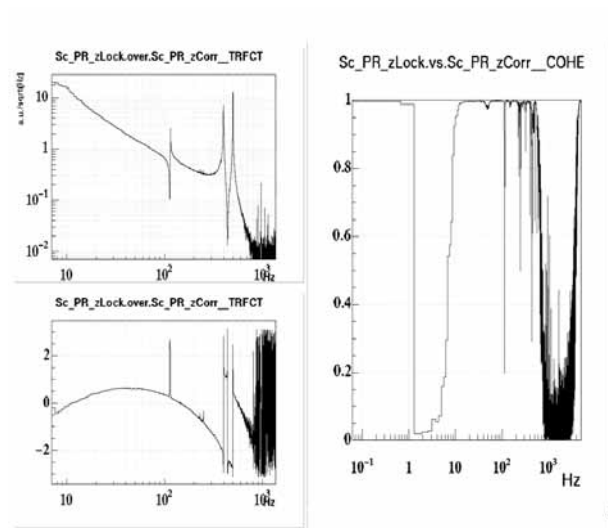


FIG. 5.6: Fonction de transfert en boucle ouverte de la boucle d'asservissement de la cavité PR-NI.

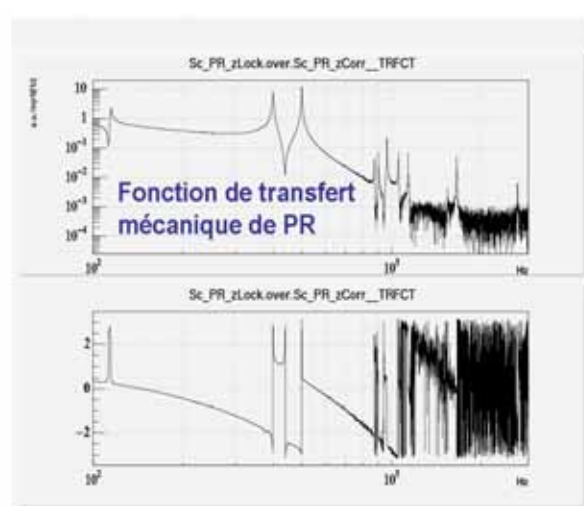
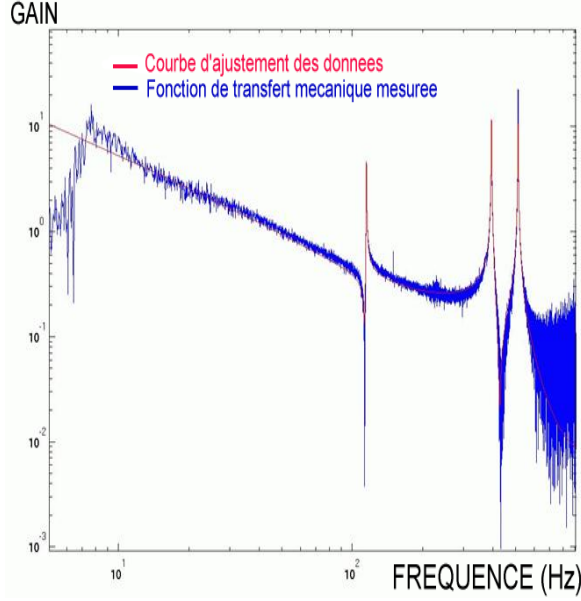


FIG. 5.7: Aperçu global de la fonction de transfert mécanique de PR.

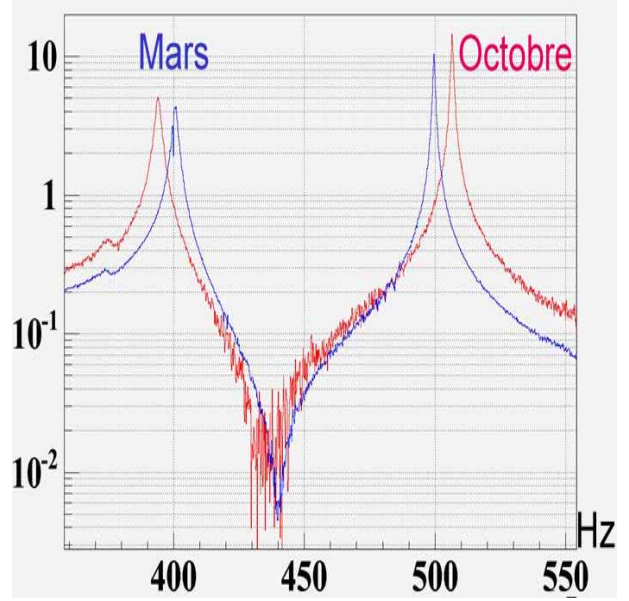
Les caractéristiques de la FTBO montre que la boucle d'asservissement est robuste. La fréquence de gain unité est proche de 70 Hz. Nous avons ainsi pu évaluer la fonction de transfert mécanique du miroir de recyclage.

Cette fonction de transfert mécanique se compose d'une suite de double pôle et de double zéro (voir figure 5.7). Nous constatons que les structures placées vers 100 Hz et 450 Hz contribuent à la boucle d'asservissement car elles sont au-dessus du gain unité. Nous devons donc prendre en compte l'effet de cette fonction de transfert lors du travail sur l'acquisition du lock de Virgo.





**FIG. 5.8:** Ajustement de la fonction de transfert mécanique du miroir de recyclage PR.



**FIG. 5.9:** Evolution des résonances de la fonction de transfert mécanique du miroir de recyclage PR.

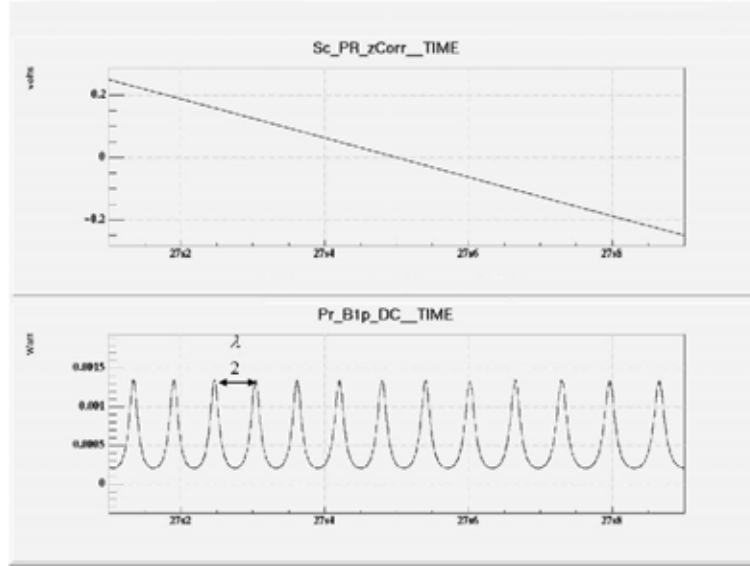
Nous avons donc, par un ajustement des données effectué avec le logiciel Matlab (voir figure 5.8) obtenu une expression analytique de cette fonction de transfert. Puis, nous avons implémenté la fonction de transfert inverse de celle obtenue par l'ajustement des données au niveau du système contrôlant les suspensions. Nous avons pu ainsi limiter l'impact de cette fonction de transfert sur le contrôle de la cavité PR-NI. Cependant, la structure de la fonction de transfert mécanique du miroir PR évolue dans le temps (voir figure 5.9). Il semble que cette variation soit liée à un changement de la température dans la tour. Nous réévaluons les paramètres de l'ajustement du filtre de compensation dès que les oscillations caractéristiques de la fonction de transfert mécanique du miroir PR apparaissent dans les signaux de corrections envoyés pour contrôler la longueur de recyclage.

À la suite du lock de la cavité PR-NI, nous avons pu calibrer le signal de correction envoyé au miroir de recyclage (voir figure 5.10). Nous avons injecté au niveau des deux bobines placées en haut et en bas du miroir PR un signal sinusoïdal de fréquence 100 mHz et d'amplitude 1 V. Nous comptons 26 franges pour une prise de données de 1s. Ainsi, une première calibration est de  $\frac{13 \mu\text{m}}{\text{V}}$ . Cette valeur est utile pour estimer par la suite le gain optique concernant la longueur de recyclage.

### 5.2.3 Etape2

Dans cette partie, nous allons étudier l'Etape2 de l'algorithme d'acquisition du lock. L'Etape2 est validée lorsque les critères suivants sont remplis :

- la cavité de recyclage est résonante pour les BL et anti-résonante pour la porteuse ;
- les cavités Fabry-Perot sont hors résonance pour la porteuse et les BL ;



**FIG. 5.10:** Calibration des corrections envoyées pour locker la cavité PR-NI.

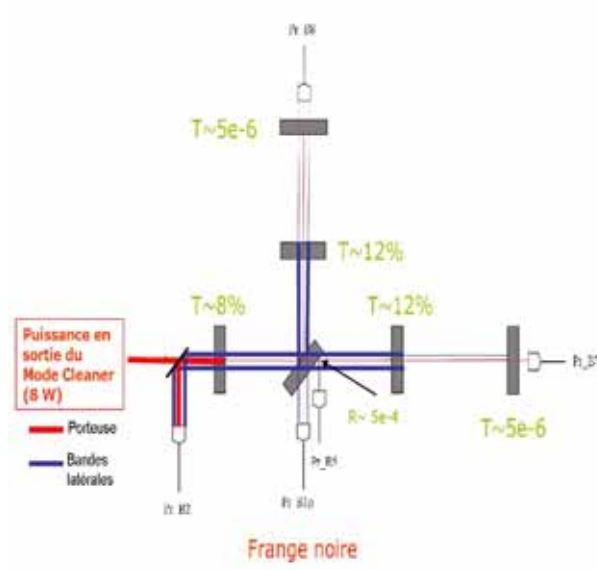
- le Michelson est sur la frange noire pour la porteuse.

Un état comparable à l'Etape2 (voir figure 5.11) est l'Etape2CITF (voir figure 5.12). Celle-ci consiste à désaligner les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot des bras. Les BL sont résonantes et la porteuse antirésonante dans la cavité de recyclage. Le Michelson est sur la frange noire pour la porteuse.

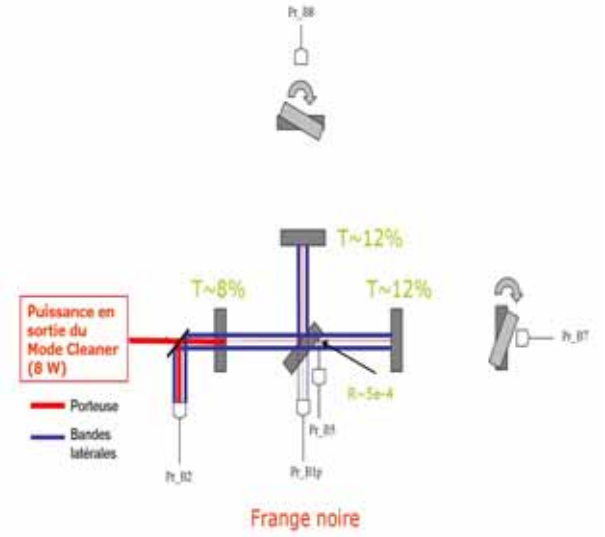
A partir de l'Etape2CITF, nous pouvons évaluer les paramètres nécessaires au lock de l'Etape2. Nous avons procédé en simulation de la façon suivante :

- travail sur l'Etape2CITF : optimisation de la phase de démodulation et mesure des gains optiques des signaux d'erreurs B2\_ACp et B2\_ACq pour les longueurs MICH et PRCL ;
- lock de l'Etape2CITF en utilisant les signaux d'erreurs B2\_ACp et B2\_ACq ;
- réalignement des miroirs de fond de tel façon à se trouver dans la configuration Virgo ;
- obtention de la phase de démodulation pour la photodiode B2 de tel sorte à découpler le plus possible la dépendance des signaux d'erreurs pour les longueurs MICH et PRCL ;
- simuler le lock de l'Etape 2 avec tous les miroirs libres.

La simulation adoptée pour le lock de l'Etape2CITF est quasi statique car la finesse de la cavité est faible. Seul le mode  $TEM_{00}$  est considéré. Dans les deux cas de figures, Etape2 ou Etape2CITF, les bandes latérales doivent être résonantes dans la cavité de recyclage. Le signal B5\_2f\_ACq permet de repérer le passage à la résonance des BL (voir figure 5.13).



**FIG. 5.11:** Configuration optique de l'Etape2. Les bandes latérales sont résonantes et la porteuse antirésonante dans la cavité de recyclage. Les bandes latérales et la porteuse sont antirésonantes dans les deux cavités Fabry-Perot des bras.



**FIG. 5.12:** Configuration optique de l'Etape2CITF. Les bandes latérales sont résonantes et la porteuse antirésonante dans la cavité de recyclage. Les miroirs de fond sont désalignés.

Pour le contrôle des longueurs MICH et PRCL, nous avons choisi d'utiliser la matrice de répartition suivante :

$$\begin{pmatrix} Z_{PR} \\ Z_{BS} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{PRCL} \\ \text{MICH} \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

Cette matrice de répartition a l'avantage de découpler les degrés de liberté des bras (CARM et DARM) des degrés de liberté de la cavité centrale (MICH et PRCL).

La matrice optique utilisée est la suivante :

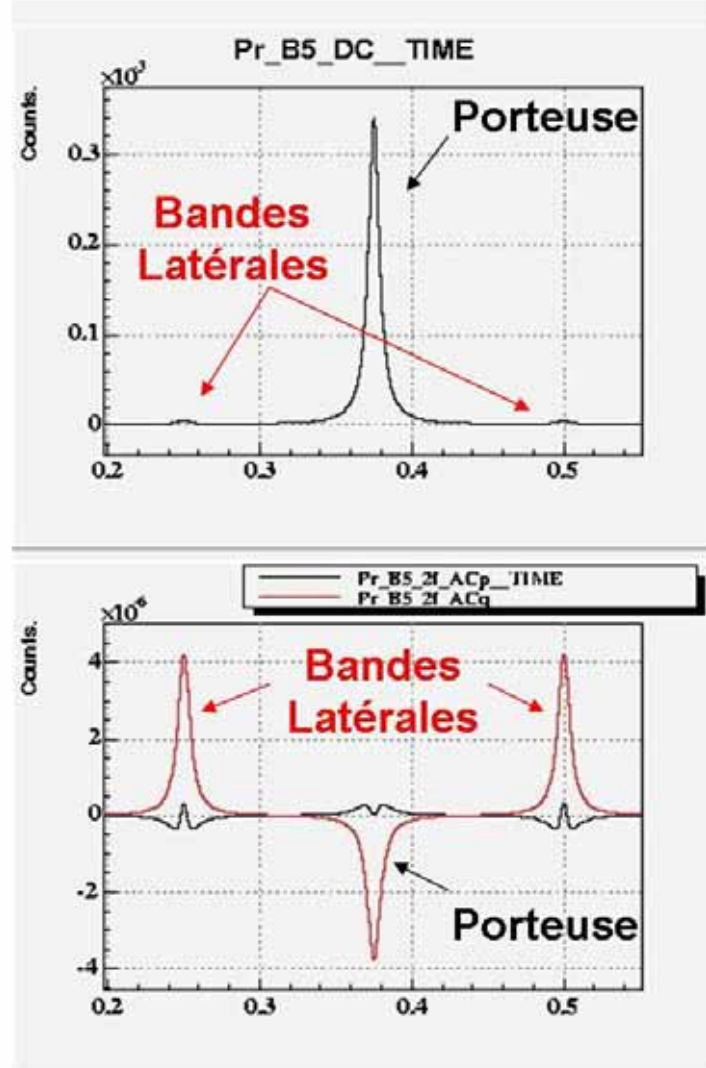
$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{B2\_ACq}^{\text{MICH}} \sqrt{B5\_2f\_ACq} & 0 \\ 0 & g_{B2\_ACp}^{\text{PRCL}} \sqrt{B5\_2f\_ACq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

avec  $g_{B2\_ACp}^{\text{PRCL}}$  et  $g_{B2\_ACq}^{\text{MICH}}$ , les gains optiques pour la longueur considérée.

Dans le travail en simulation et sur le détecteur, nous changeons la phase de démodulation sur B2 pour maximiser le rapport  $\frac{B2\_ACp}{B2\_ACq}$ . Nous avons mesurée la matrice optique suivante :

$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

Cette matrice optique a été normalisée par le terme dominant qui mesure la dépendance du signal B2\_ACp par rapport à un mouvement PRCL.



**FIG. 5.13:** Cette figure est obtenue par un mouvement du miroir de recyclage dans la configuration optique Etape2CITF. En haut : puissance mesurée par la photodiode Pr\_B5 en DC. En bas : puissance mesurée par le signal B5\_2f\_ACp et B5\_2f\_ACq. Le signal démodulé à 2  $\Omega$  permet de discriminer efficacement le passage à la résonance de bandes latérales et de la porteuse.

Expérimentalement, nous avons multiplié par  $\frac{1}{20}$  le gain optique mesuré pour la longueur PRCL pour obtenir celui de la longueur MICH .

En simulation, nous n'avons pas pris en compte la fonction de transfert mécanique de PR. Donc, en réalité, la fréquence de gain unité de la boucle d'asservissement devra être plus faible que 100 Hz, de sorte à ne pas exciter les résonances mécaniques de PR.

L'étape suivante a été de travailler sur l'instrument. La figure 5.14 illustre les signaux utilisés pour le lock de l'Etape2CITF. Nous voyons que les signaux d'erreur ne sont pas symétriques, dû entre autre aux mouvements angulaires des miroirs.

L'algorithme de lock consiste à appliquer des corrections sur la position des miroirs PR et BS dès que le signal B5\_2f\_ACq atteint 80% de sa valeur maximale. Le lock a été obtenu à la première tentative (voir figure 5.15).

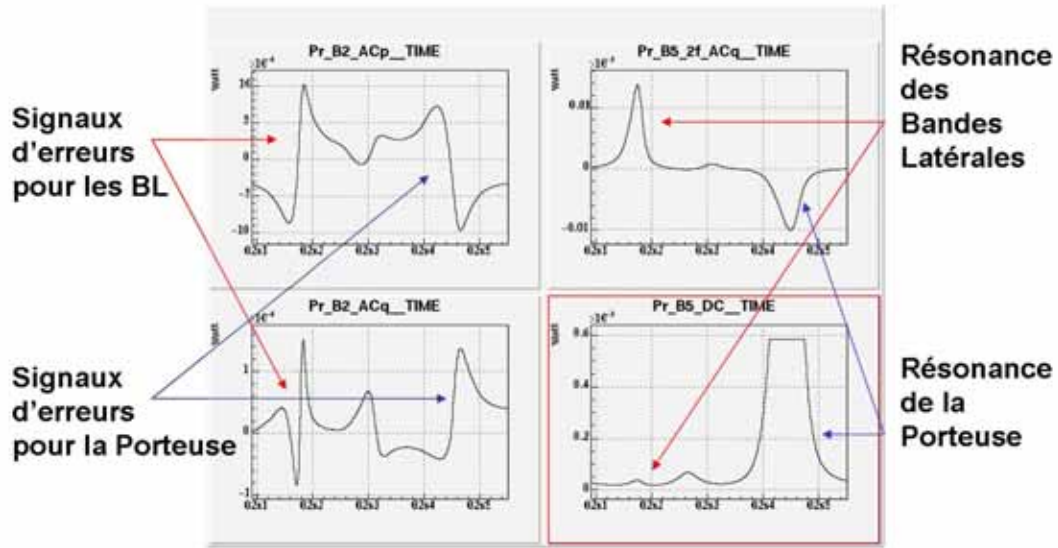


FIG. 5.14: Signaux d'erreurs et puissance mesurés sur la porteuse et les BL. La puissance sur B5\_DC sature lorsque la porteuse passe à la résonance.

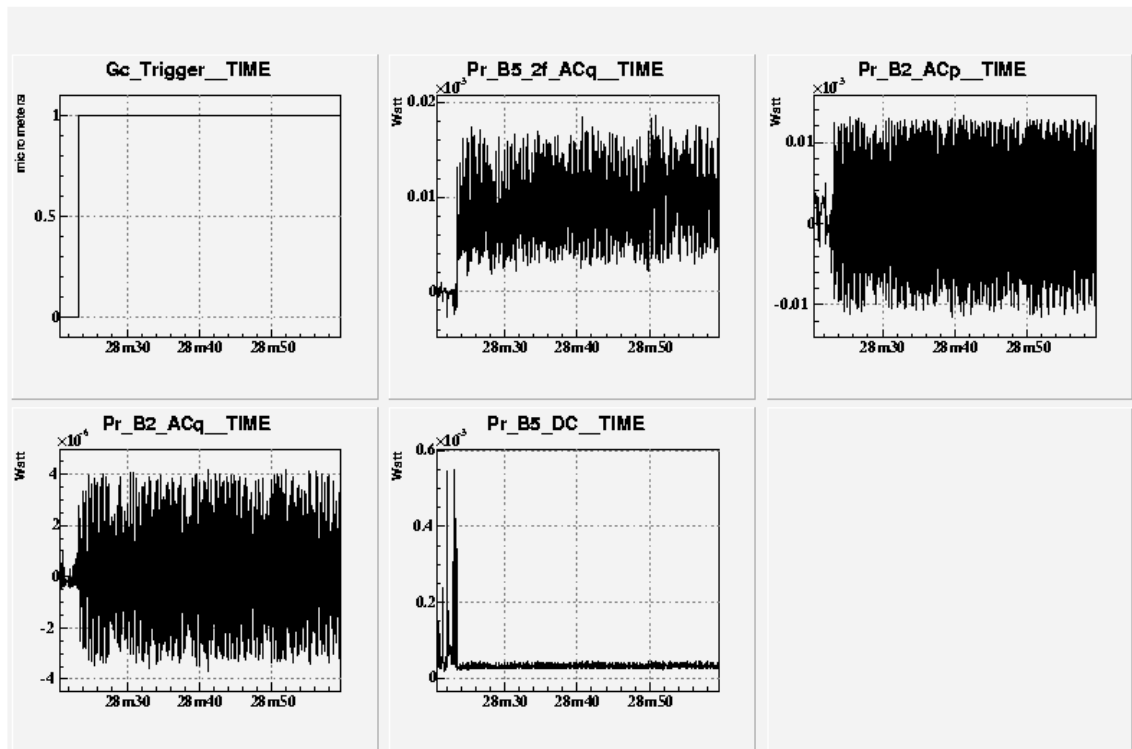


FIG. 5.15: Lock de l'Etape2CITF. Les signaux oscillent beaucoup car les gains optiques n'ont pas encore été ajustés.

## 5.2. ACQUISITION DU LOCK MULTI-ÉTAPE

Les signaux B5\_2f\_ACq et les signaux d'erreurs sont très bruités car les phases de démodulation et les gains optiques ne sont pas bien ajustés. Après le lock de l'Etape2CITF, nous avons caractérisé la boucle d'asservissement :

- Boucle d'asservissement de la longueur PRCL

Nous avons introduit un bruit blanc jusqu'à 1 kHz dans le signal de correction envoyé au miroir PR. Les caractéristiques de la boucle d'asservissement sont les suivantes :

- La marge de phase est de 15 degrés.
- La marge de gain est de 1.2.
- La fréquence de gain unité est de 72 Hz.

Les caractéristiques de la boucle d'asservissement mesurées sur l'instrument sont moins robustes que celles obtenues en simulation (marge de phase de 30 degrés ; marge de gain de 3). Puisque les marges de gain et de phase sont faibles, il est difficile d'améliorer les caractéristiques de la boucle d'asservissement. Nous devons de plus être attentif à ne pas exciter les résonances de la fonction de transfert mécanique du miroir PR (résonances au delà de 100 Hz).

- Boucle d'asservissement de la longueur MICH

Nous avons introduit un bruit blanc jusqu'à 1 kHz dans le signal de correction envoyé au miroir BS. Les caractéristiques de la boucle d'asservissement sont les suivantes :

- La marge de phase est de 20 degrés.
- La marge de gain est de 1.5.
- La fréquence de gain unité est de 25 Hz.

Les remarques faites en ce qui concerne la boucle d'asservissement PRCL sont aussi valables dans ce cas.

Pour tester la robustesse de l'algorithme de lock de l'Etape2CITF, nous avons acquis le lock puis ouvert la boucle d'asservissement à plusieurs reprises. La figure 5.16 montre que le lock est toujours obtenu à la première tentative comme l'illustre le signal qui indique le moment où les corrections sont envoyées au miroir PR (Gc\_Trigger). Typiquement la durée de l'acquisition du lock de l'Etape2CITF est de quelques millisecondes.

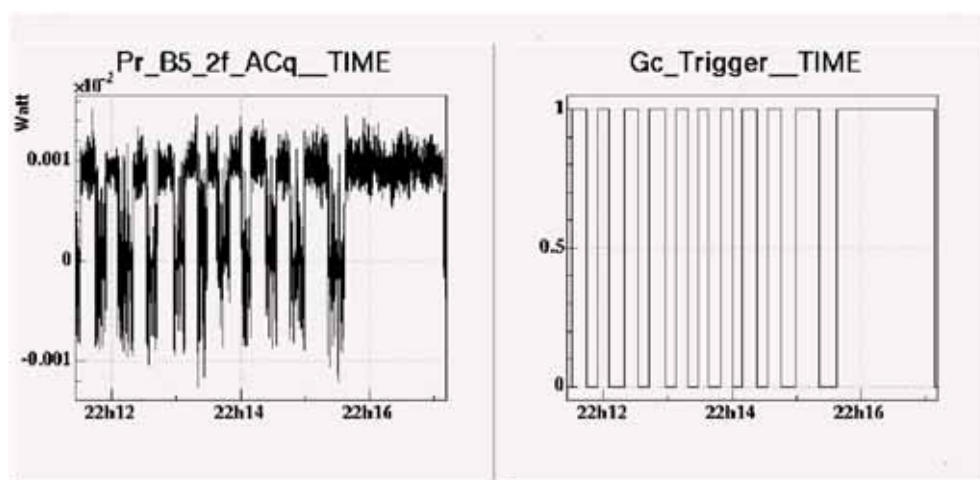


FIG. 5.16: Statistique sur le lock de l'Etape2CITF.

Le lock de l'Etape2CITF nous a permis de valider notre approche. Nous avons par la suite appliqué cet algorithme dans la configuration optique de Virgo pour le lock de l'Etape2.

### Mise en oeuvre de l'Etape2

Quand tous les miroirs sont alignés, nous sommes dans la configuration Virgo. L'Etape2 est un état instable. En effet, quand les bandes latérales résonnent dans une des deux cavités Fabry-Perot, la phase du champ réfléchi par cette cavité pour les BL est déphasée de  $\pi$ . Le champ de recyclage pour les BL est modifié et nous perdons le lock de l'Etape2. Inversement, quand la porteuse passe à la résonance dans une des deux cavités Fabry-Perot, nous allons à l'Etape3 (voir partie 5.2.4) de la stratégie d'acquisition du lock multiétape.

La configuration Etape2CITF est utilisée pour déterminer les valeurs des paramètres utiles à l'algorithme de lock de tout l'interféromètre (gains optiques, gains des filtres, phase de démodulation).

La matrice optique théorique de l'Etape2 est diagonale :

$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{B2\_ACq}^{MICH} & 0 \\ 0 & G_{B2\_ACp}^{PRCL} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Or celle mesurée à l'Etape2 en simulation n'est pas diagonale :

$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 10^{-2} & 0.87 \\ -5 \times 10^{-3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

En effet, cette matrice optique a été obtenue pour une optimisation de la phase de démodulation sur B2 faite sur la configuration de l'Etape2CITF. Les gains optiques dépendant de la longueur du Michelson sont très faibles comparés à ceux pour la longueur de recyclage. Il est donc difficile à partir de cette matrice de pouvoir découpler le système et reconstruire correctement la longueur du Michelson.

Constatons pour commencer qu'à l'Etape2, les cavités Fabry-Perot jouent un rôle très important. À cause de leur faible finesse, la phase introduite par les bras au champ des BL retournant dans la cavité de recyclage est différente. Ce déphasage explique la non diagonalité de la matrice optique pour l'Etape 2 comparé à l'Etape2CITF. Or, le signal B5\_2f\_ACq est très sensible à la puissance des bandes latérales dans la cavité de recyclage. Il dépend donc de ce déphasage. Ainsi, nous avons un lien direct entre la non diagonalité de la matrice optique et le signal B5\_2f\_ACq. Nous avons donc dérivé une procédure pour obtenir une matrice optique diagonale à partir d'une optimisation sur le signal B5\_2f\_ACq :

- Nous avons mesuré une phase de démodulation ( $\phi_{\text{Etape2CITF}}$ ) pour obtenir une matrice diagonale à l'Etape2CITF.
- Nous maximisons le rapport  $\frac{B5\_2f\_ACq}{B5\_2f\_ACp}$  à l'Etape2. La nouvelle phase de démodulation est différente de celle mesurée à l'Etape2CITF d'une quantité  $\Delta\phi$ . En modifiant de  $\Delta\phi$  la phase de démodulation sur B2 par rapport à celle obtenue pour l'Etape2CITF, nous obtenons une matrice optique diagonale.

## 5.2. ACQUISITION DU LOCK MULTI-ÉTAPE

Avec cette nouvelle phase de démodulation, la matrice optique de l'Etape2 est diagonale et semblable à celle de l'Etape2CITF :

$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 10^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

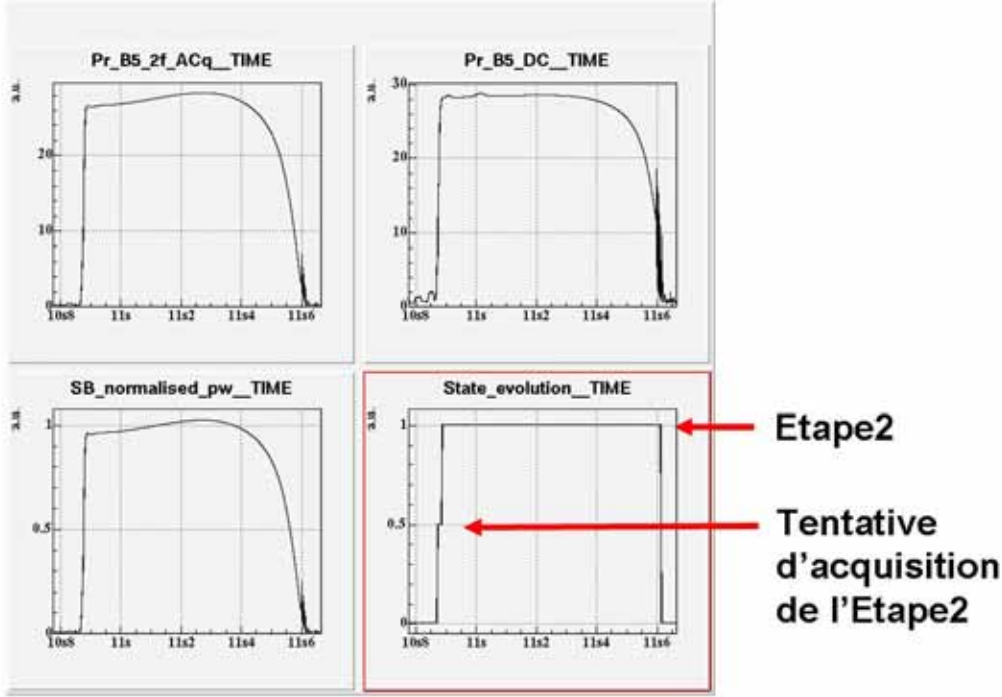


FIG. 5.17: Exemple du lock de l'Etape2 en simulation.

La figure 5.17 présente un événement typique de lock de l'Etape2. Lorsque le lock est acquis, la puissance se stabilise dans la cavité de recyclage comme le montre les signaux B5\_2f\_ACq et B5\_DC. L'Etape2 reste locké près de 800 ms mais est perdue dès lors que les BL deviennent résonantes dans une des deux cavités Fabry-Perot. Le signal State\_Evolution nous indique dans quel étape du processus d'acquisition du lock nous nous trouvons (1 = Etape2).

Lors de l'expérimentation de l'algorithme en Juillet 2004, nous avons obtenu une durée de lock maximale de l'Etape2 de 360 ms (voir tableau 5.1 page 160), soit près de 50 fois la durée de la résonance de la cavité de recyclage ( $\frac{\lambda}{2F} \sim 7$  ms) pour une vitesse typique de  $1\mu\text{m/s}$ .

L'étape suivante a été de préparer le lock de l'Etape3.



### 5.2.4 L'Etape3

L'Etape3 est validée lorsque les critères suivants sont remplis :

- la porteuse n'est pas résonante dans la cavité de recyclage ;
- la porteuse est sur la frange blanche du Michelson ;
- la porteuse est résonante dans une des deux cavités Fabry-Perot ;
- les bandes latérales sont résonantes dans la cavité de recyclage ;
- les bandes latérales sont anti résonantes dans la cavité Fabry-Perot pour laquelle la porteuse est résonante ;
- les bandes latérales et la porteuse sont hors résonance dans l'autre cavité Fabry-Perot.

Pour le lock de l'Etape3, deux cas de figures sont à considérer. L'un consiste à locker la porteuse dans le bras Nord et l'autre à locker la porteuse dans le bras Ouest. La figure 5.18 illustre le cas où le bras Nord est locké sur la porteuse.

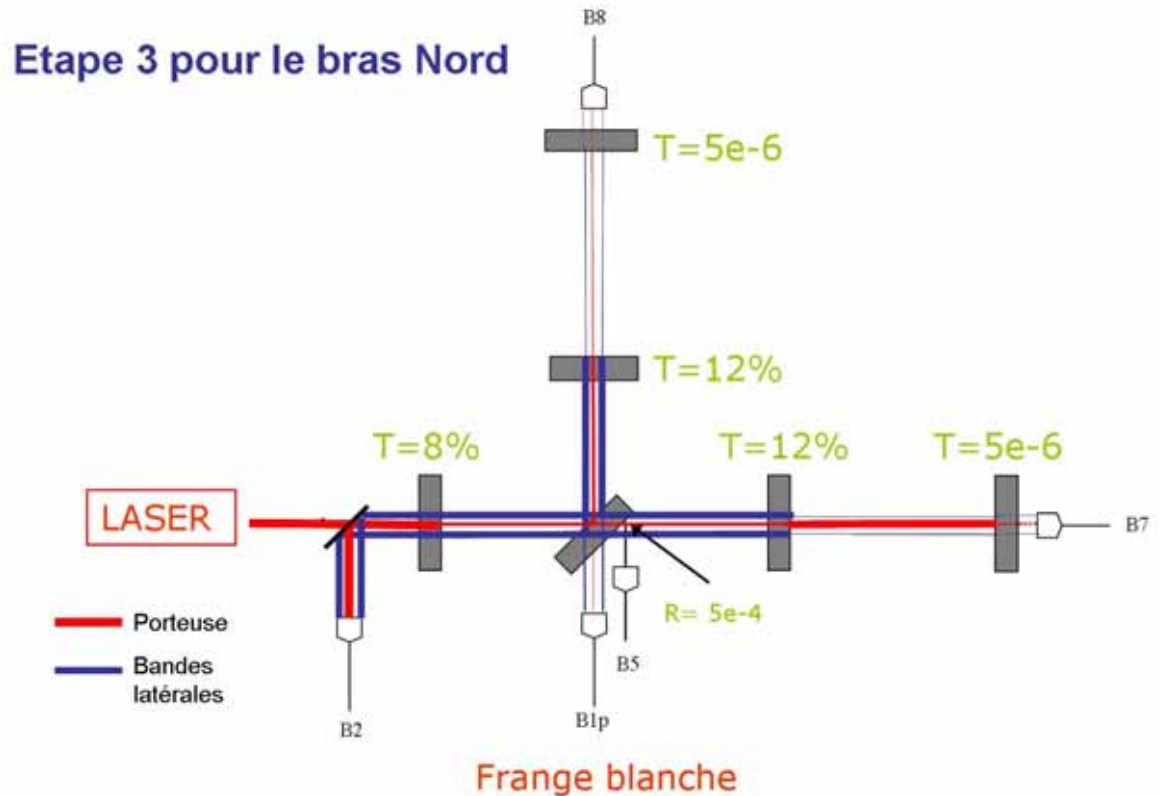


FIG. 5.18: Représentation du lock de l'Etape 3 du processus d'acquisition du lock pour le bras Nord.

### La matrice optique

La matrice optique de l'Etape 3 est diagonale et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \\ B1p\_ACq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{B2\_ACq}^{MICH} & 0 & 0 \\ 0 & G_{B2\_ACp}^{PRCL} & 0 \\ 0 & 0 & G_{B1p\_ACq}^{DARM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \\ DARM \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

Le terme DARM indique simplement dans ce cas le mouvement d'un des bras. Le choix d'utiliser la variable DARM plutôt que CARM pour contrôler la cavité Fabry-Perot à l'Etape3 a été fait car à l'Etape4 le pôle associé à la longueur CARM est différent du pôle de la cavité Fabry-Perot seule et de la longueur DARM.

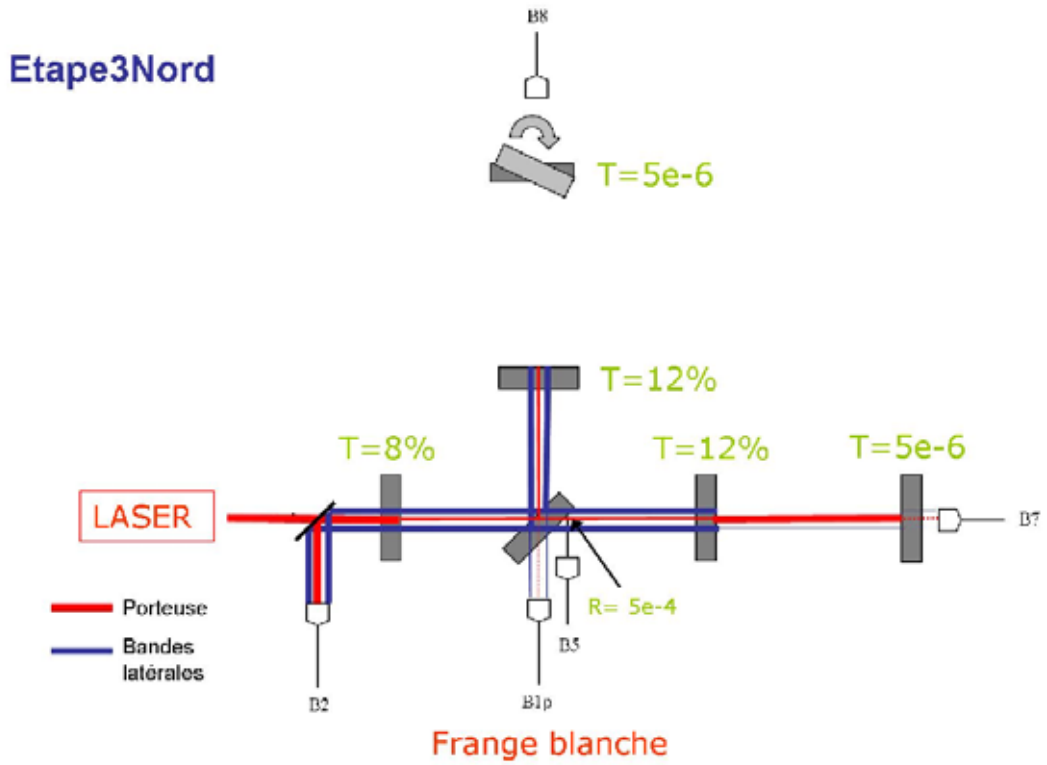


FIG. 5.19: Représentation du lock de l'Etape3Nord.

Comme pour l'Etape2, des mesures préliminaires sont nécessaires pour préparer le lock de l'Etape3. Pour cela, nous désalignons le miroir de fond de la cavité Ouest (Etape3Nord) ou de la cavité Nord (Etape3Ouest). L'un des cas de figures est illustré sur la figure 5.19.

### Etape3Nord

Le lock de l'Etape3Nord se fait en deux étapes. Nous devons tout d'abord locker l'Etape2. Puis dès que la porteuse devient résonante dans la cavité Fabry-Perot, nous devons la maintenir à la résonance. Nous asservissons ainsi trois longueurs : MICH, PRCL et DARM.

### *Etape2*

Les phases de démodulation et la matrice optique obtenues pour le lock de l'Etape2 ne changent pas lorsque nous voulons locker l'Etape3Nord ou l'Etape3.

### *La matrice optique de l'Etape3Nord*

C'est une matrice  $3 \times 3$ , non diagonale :

$$\begin{pmatrix} \text{B2\_ACq} \\ \text{B2\_ACp} \\ \text{B1p\_ACq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{\text{B2\_ACq}}^{\text{MICH}} & G_{\text{B2\_ACq}}^{\text{PRCL}} & 0 \\ 0 & G_{\text{B2\_ACp}}^{\text{PRCL}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{\text{B1p\_ACq}}^{\text{DARM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \\ \text{DARM} \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

Le terme non diagonal provient de la dissymétrie de réflectivité des miroirs de fond du Michelson quand le bras Nord est résonant pour la porteuse. Pour comprendre ce mécanisme, établissons la réflectivité du miroir équivalent du Michelson, soit :

$$\frac{\psi_2}{\psi_{in}} = i \left( t_{BS}^2 r_{\text{FP}_N}(\omega) e^{-i2\frac{\omega}{c}l_1} - r_{BS}^2 r_{\text{FP}_W}(\omega) e^{-i2\frac{\omega}{c}l_2} \right) \quad (5.56)$$

En posant  $\Delta l = l_2 - l_1$  et  $t_{BS}^2 = r_{BS}^2 = \frac{1}{2}$ , nous avons :

$$\frac{\psi_2}{\psi_{in}} \propto i \frac{1}{2} \left( r_{\text{FP}_N}(\omega) e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} - r_{\text{FP}_W}(\omega) e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \right) \quad (5.57)$$

Ecrivons que  $r_{\text{FP}_W}(\omega) = r_{\text{FP}_N}(\omega) - x$  alors :

$$\frac{\psi_2}{\psi_{in}} \propto r_{\text{MICH}_{\text{Symétrique}}} - \frac{x}{2} \left( \sin\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) + i \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \right) \quad (5.58)$$

avec  $r_{\text{MICH}_{\text{Symétrique}}}$ , la réflectivité équivalente de l'interféromètre de Michelson pour des miroirs de fond des bras égaux. Par conséquent, une différence de réflectivité engendre un signal en quadrature. Dans le cas de l'Etape3Nord, nous avons  $r_{\text{FP}_N}(\omega_0) \sim -1$  et  $r_{\text{FP}_W}(\omega_0) = r_{\text{WI}} = 88\%$ . Le terme de couplage est de 12 %.

### *La matrice de répartition*

La matrice de répartition adopté pour contrôler les longueurs PRCL, DARM et MICH est :

$$\begin{pmatrix} z_{\text{PR}} \\ z_{\text{BS}} \\ z_{\text{NE}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{PRCL} \\ \text{MICH} \\ \text{DARM} \end{pmatrix} \quad (5.59)$$

### *Lock de l'Etape3Nord en simulation et sur l'instrument*

Les figures 5.20 et 5.21 illustrent le lock obtenu en simulation et sur l'instrument. Le lock obtenu sur l'instrument est perturbé par le bruit de fréquence du laser (haute fréquence) et par l'alignement du faisceau (basse fréquence). Après avoir acquis le lock de l'Etape3Nord, nous avons travaillé sur le lock de l'Etape3Ouest.

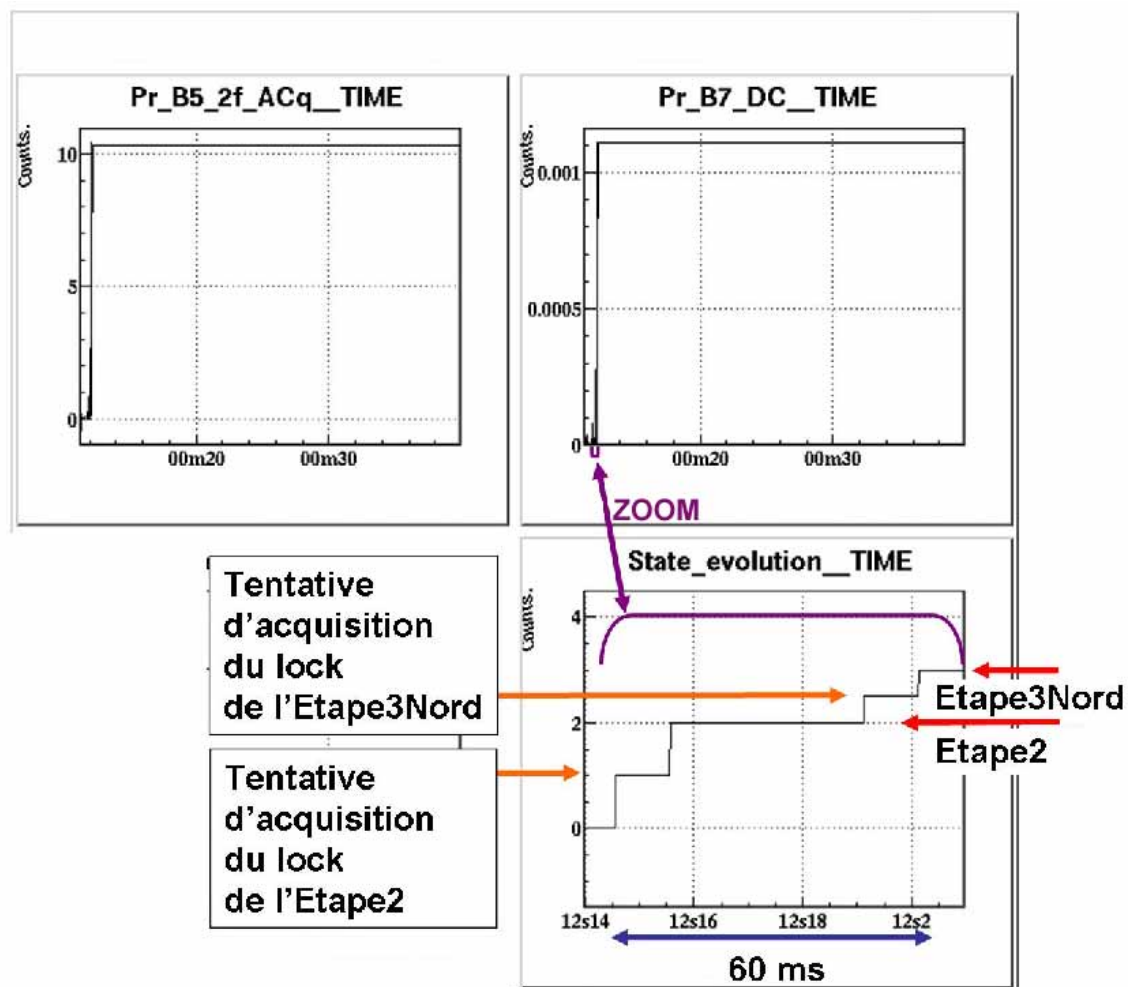


FIG. 5.20: Lock de l'Etape3Nord en simulation.

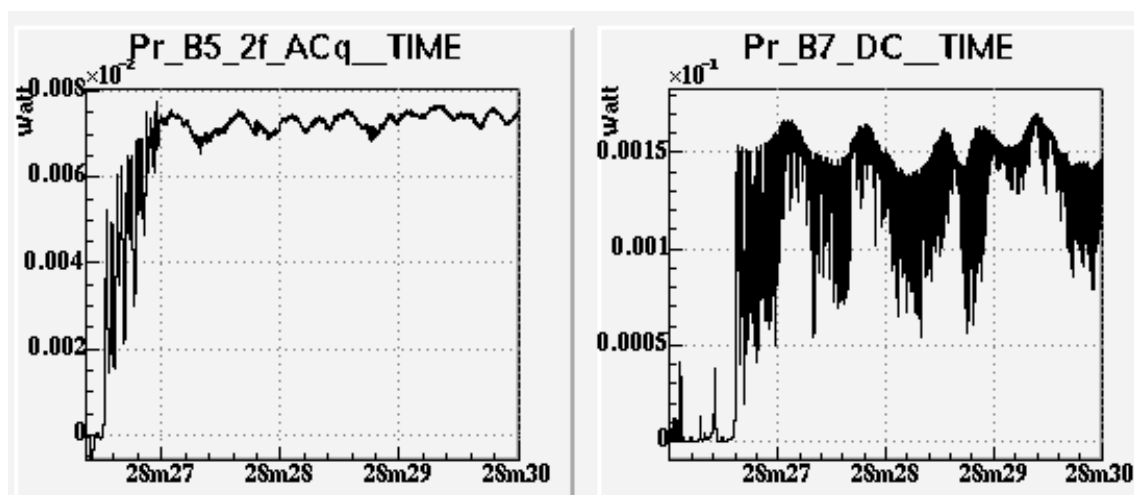
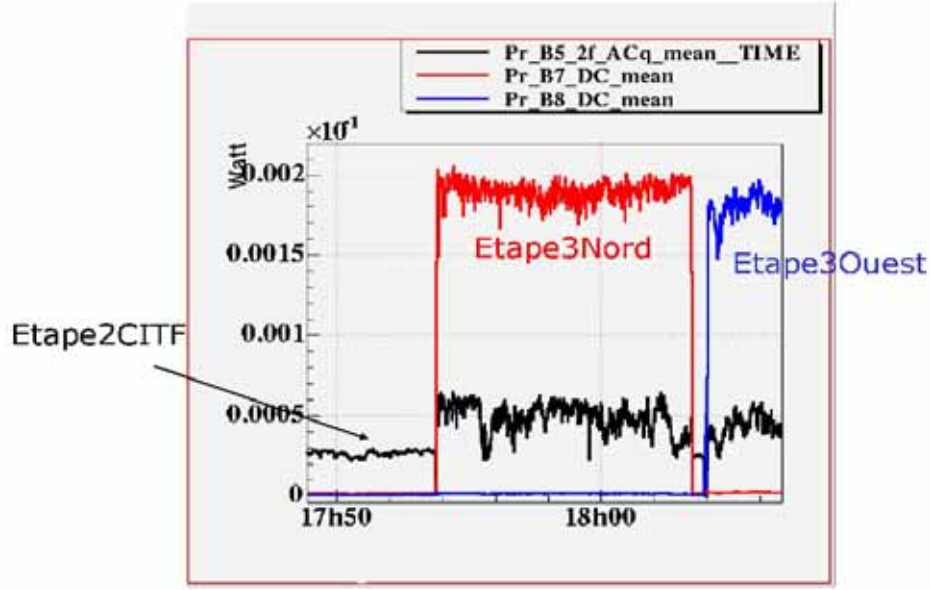


FIG. 5.21: Lock de l'Etape3Nord sur l'instrument.



**FIG. 5.22:** Passage entre l'Etape2CITF, l'Etape3Nord et l'Etape3Ouest en alignant ou désalignant les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot.

Nous avons acquis le lock de ces deux configurations optiques sans aucun problème particulier.

Les configurations Etape2CITF, Etape3Nord et Etape3Ouest sont des étapes obligées pour évaluer les paramètres (gain optique, gain des filtres de compensation, phase de démodulation) nécessaires pour le lock de Virgo. Nous avons développé un algorithme qui nous permet de locker successivement ces différentes étapes (voir figure 5.22). Pour cela, il nous suffit d'aligner ou de désaligner les miroirs de fond des cavités Fabry-Perot.

### Mise en oeuvre de l'Etape3

Dans cette configuration optique, les miroirs se déplacent librement. Le lock de l'Etape2 est fait comme précédemment (voir page 146).

*La matrice optique*

La matrice optique choisie pour contrôler l'Etape3 est diagonale :

$$\begin{pmatrix} B2\_ACq \\ B2\_ACp \\ B1p\_ACq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{B2\_ACq}^{MICH} & 0 & 0 \\ 0 & G_{B2\_ACp}^{PRCL} & 0 \\ 0 & 0 & G_{B1p\_ACq}^{DARM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} MICH \\ PRCL \\ DARM \end{pmatrix} \quad (5.60)$$

Le signe du terme  $G_{B1p\_ACq}^{DARM}$  change quand nous passons du lock de l'Etape3 du bras Nord au lock de l'Etape3 du bras Ouest. En effet, le signe du signal Pound Drever dépend de la phase de la réflectivité complexe des cavités Fabry-Perot.

## 5.2. ACQUISITION DU LOCK MULTI-ÉTAPE

### *La matrice de répartition*

La matrice de répartition adoptée pour contrôler les longueurs PRCL, DARM et MICH est :

$$\begin{pmatrix} z_{BS} \\ z_{PR} \\ z_{NE} \\ z_{WE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \\ \text{DARM} \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

### *Lock de l'Etape3*

Nous avons ensuite testé l'algorithme de lock en configuration Virgo. La figure 5.23 illustre un lock typique de l'Etape3. Le lock est acquis en 20 ms. La puissance sur le signal B5\_2f\_ACq reste constante après acquisition du lock de l'Etape2. La puissance sur B8\_DC se stabilise, montrant que nous avons locké l'Etape3. Le lock est perdu car les BL deviennent résonantes dans la cavité Nord. L'événement dure près de 300 ms.

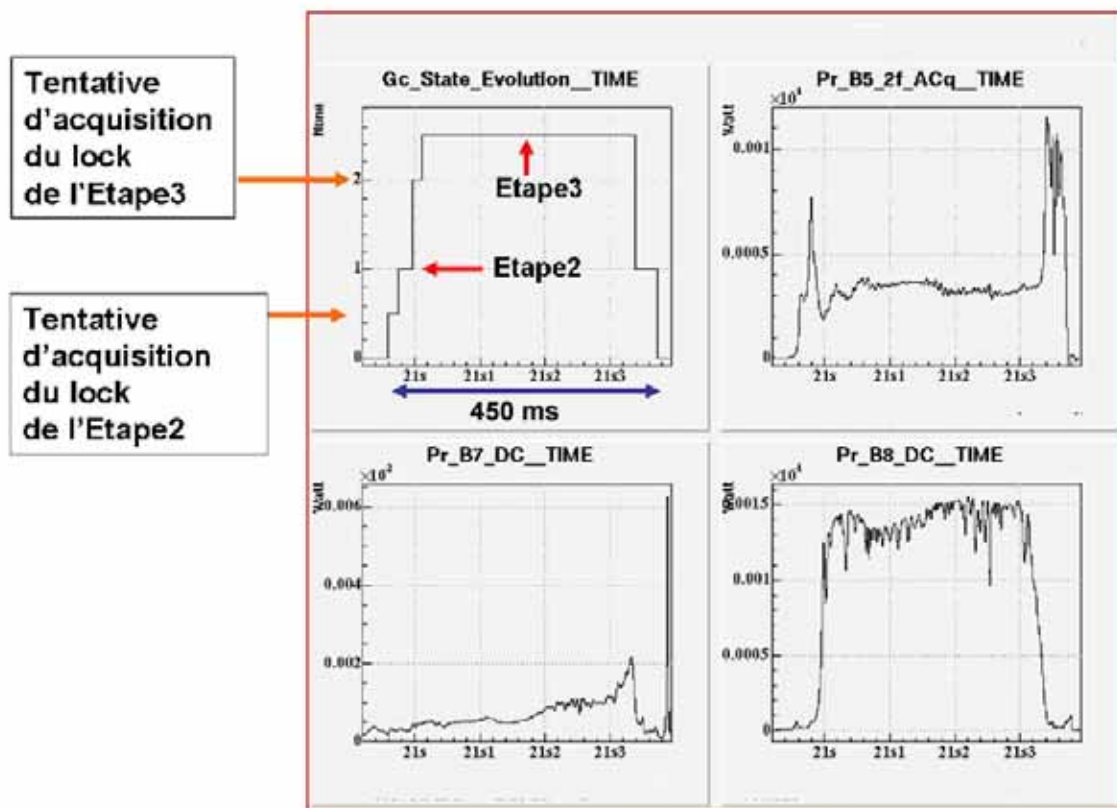


FIG. 5.23: Exemple de lock de l'Etape3.

### 5.2.5 Etape4

Pour l'Etape4, aucune mesure sur l'instrument n'est réellement possible. La simulation est l'outil indispensable pour préparer l'acquisition du lock. L'Etape4 est validée quand les critères suivants sont remplis :

- les bandes latérales sont résonantes dans la cavité de recyclage ;
- les bandes latérales sont anti résonantes dans les deux cavités Fabry-Perot ;
- la porteuse est résonante dans la cavité de recyclage ;
- la porteuse est sur la frange noire du Michelson ;
- la porteuse est résonante dans les deux cavités Fabry-Perot des bras.

#### La matrice optique

La matrice optique (4×4) utilisée pour le lock de Virgo est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \text{B2\_ACp} \\ \text{B1p\_ACq} \\ \text{B5\_ACq} \\ \text{B5\_ACp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & G_{\text{B2\_ACp}}^{\text{PRCL}} & 0 & G_{\text{B2\_ACp}}^{\text{CARM}} \\ 0 & 0 & G_{\text{B1p\_ACq}}^{\text{DARM}} & 0 \\ G_{\text{B5\_ACq}}^{\text{MICH}} & 0 & G_{\text{B5\_ACq}}^{\text{DARM}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\text{B5\_ACp}}^{\text{CARM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \\ \text{DARM} \\ \text{CARM} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

Au départ, nous avons remplacé le signal B2\_ACq pour contrôler la longueur MICH par B5\_ACq car il est beaucoup plus sensible à cette longueur à l'Etape4. Après l'estimation des pertes des cavités Fabry-Perot, nous avons modifié la matrice optique comme nous l'explique la suite.

#### *Les pertes des cavités Fabry-Perot*

Cette partie anticipe sur les résultats obtenus sur le lock de Virgo pour l'évaluation des pertes des cavités Fabry-Perot ( $L_{FP}$ ). Connaître ce paramètre est important car il influence directement le comportement des signaux d'erreurs pour chacune des longueurs à contrôler. En effet, le gain de recyclage est fortement lié aux pertes des cavités Fabry-Perot (voir figure 5.24). En considérant des cavités Fabry-Perot symétriques, nous avons :

$$G_{\text{Porteuse}} = \frac{t_{PR}^2}{(1 - r_{PR} r_{\text{MICH}})^2} = \frac{t_{PR}^2}{(1 - r_{PR} r_{FP})^2} \quad (5.63)$$

avec  $r_{FP}$  la réflectivité de la cavité Fabry-Perot pour la porteuse. Les valeurs de  $r_{PR}$  et  $t_{PR}$  utilisées sont celles mesurées par le LMA de Lyon.

Le gain de recyclage de la porteuse ( $G_{\text{Porteuse}}$ ) est estimé en comparant la puissance sur B5 dans les configurations locké de VIRGO et du mode recombinaison de l'interféromètre.

Ainsi, la réflectivité de la cavité Fabry-Perot est d'environ de 97% soit une perte  $L_{FP}$  de l'ordre de 3%. Cette estimation a une conséquence importante sur le signal B2.

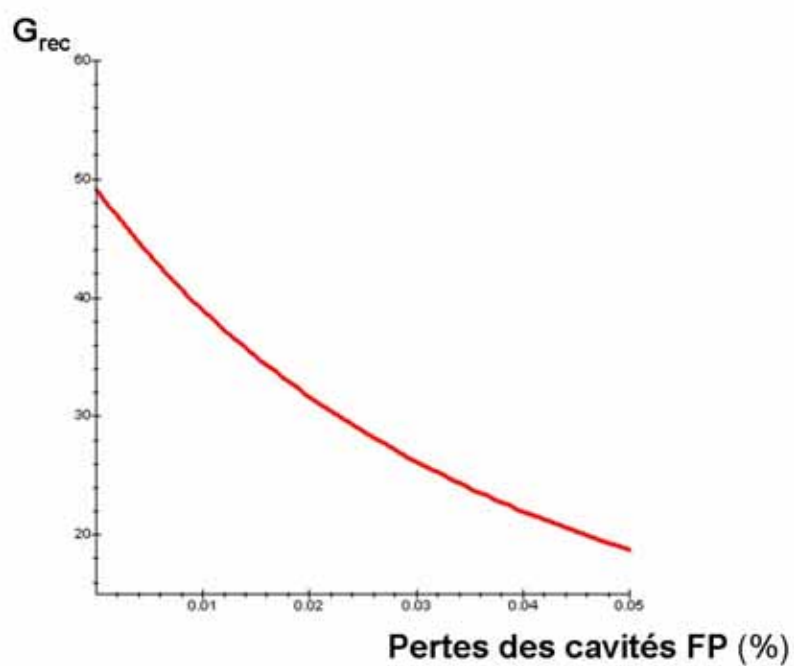


FIG. 5.24: Evolution du gain de recyclage en fonction des pertes des cavités Fabry-Perot.

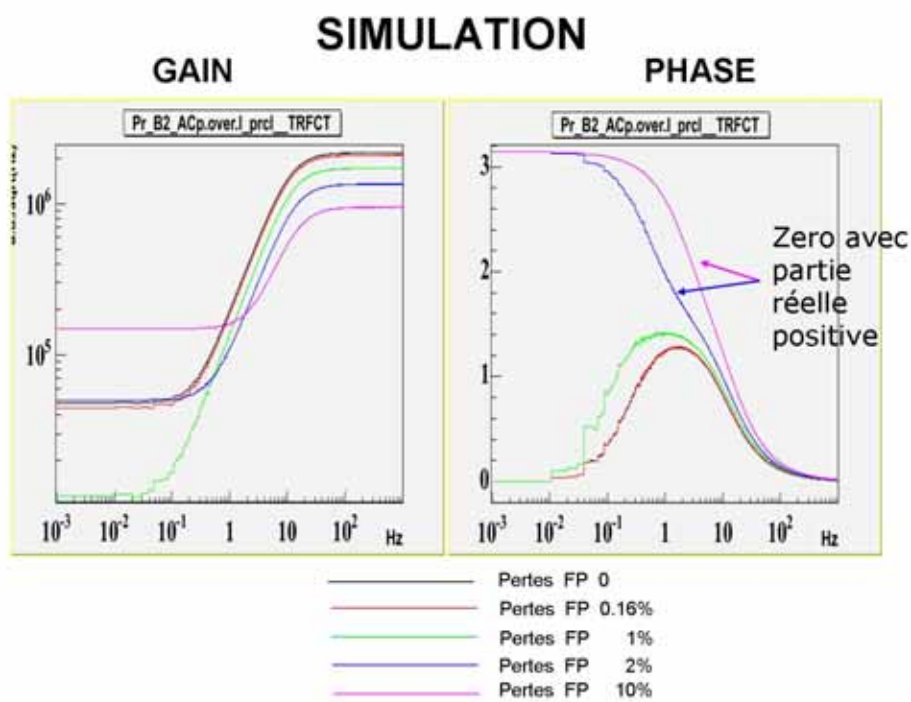


FIG. 5.25: Comportement dynamique de B2\_ACp pour un mouvement PRCL en fonction des pertes des cavités Fabry-Perot.



En effet, le zéro de sa fonction de transfert par rapport à la longueur PRCL possède une partie réelle positive (voir figure 5.25). Ceci a pour conséquence de rendre la boucle d'asservissement instable (système à phase non minimale).

Nous avons donc décidé d'utiliser le signal démodulé à  $3\Omega$  sur la photodiode B2.

#### *Les signaux d'erreurs B2\_3f*

Les caractéristiques principales du signal B2\_3f [81] sont les suivantes :

- la contribution dans le signal d'erreur de la longueur PRCL par rapport à celle de CARM est plus importante que pour la démodulation à  $\Omega$  ;
- les composantes du signal sensible aux longueurs PRCL et MICH sont plus robustes aux changements des caractéristiques optiques de l'interféromètre que les signaux démodulés à  $\Omega$  ;
- les amplitudes et les signes du signal sensible aux longueurs PRCL et MICH sont stables durant l'acquisition du lock.

Nous avons alors remplacé sans aucun ajustement dans les algorithmes d'acquisition du lock de l'Etape2CITF, de l'Etape3Nord, de l'Etape3Ouest et de Virgo les signaux B2\_ACp et B2\_ACq par respectivement B2\_3f\_ACp et B2\_3f\_ACq. Pour l'Etape4, la matrice optique adoptée est donc la suivante :

$$\begin{pmatrix} \text{B2\_3f\_ACq} \\ \text{B2\_3f\_ACp} \\ \text{B1p\_ACq} \\ \text{B5\_ACp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{\text{B2\_3f\_ACq}}^{\text{MICH}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{\text{B2\_3f\_ACp}}^{\text{PRCL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{\text{B1p\_ACq}}^{\text{DARM}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\text{B5\_ACp}}^{\text{CARM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \\ \text{DARM} \\ \text{CARM} \end{pmatrix} \quad (5.64)$$

#### *La matrice de répartition*

Nous avons choisi la matrice de répartition suivante pour contrôler l'Etape4 :

$$\begin{pmatrix} z_{BS} \\ z_{PR} \\ z_{NE} \\ z_{WE} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{MICH} \\ \text{PRCL} \\ \text{DARM} \\ \text{CARM} \end{pmatrix} \quad (5.65)$$

#### *Algorithme de lock*

Le passage de l'Etape3 à l'Etape4 s'effectue lorsque la condition suivante est remplie :

$$\frac{\text{B7\_DC}}{\text{B7\_DC\_Etape3Nord}} = \frac{\text{B8\_DC}}{\text{B8\_DC\_Etape3Ouest}}$$

Les puissances B7\_DC\_Etape3Nord et B8\_DC\_Etape3Ouest indiquent respectivement les puissances maximales atteintes par ces deux signaux pendant les tentatives de lock de l'Etape3. Dès que cette condition est remplie, nous reconstruisons les longueurs par inversion de la matrice  $4 \times 4$  (équation 5.64).

## 5.2. ACQUISITION DU LOCK MULTI-ÉTAPE

### *Tentative de Lock*

Nous avons testé le lock de Virgo en simulation (voir figure 5.26). Nous voyons que le lock est obtenu en près de une seconde, le temps que la puissance se stabilise dans les cavités Fabry-Perot. Sur l'instrument (voir figure 5.27), nous ne sommes restés lockés au mieux que quelques centaine de ms à l'Etape4. Nous avons donc voulu savoir quelles pouvaient être les raisons de cet échec.

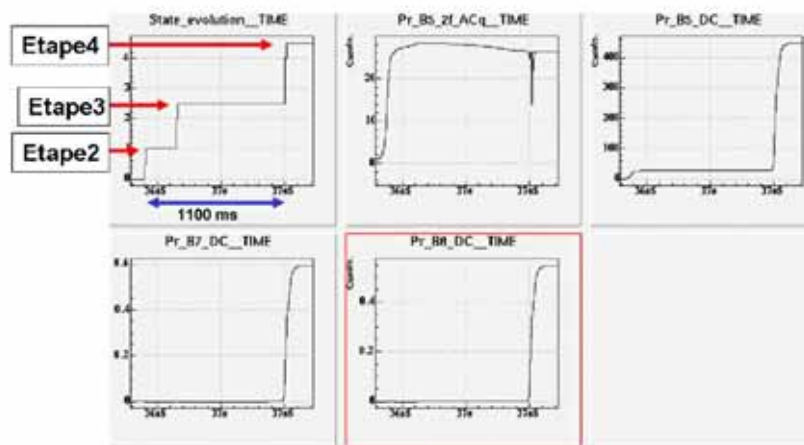


FIG. 5.26: Acquisition du lock de Virgo en simulation.

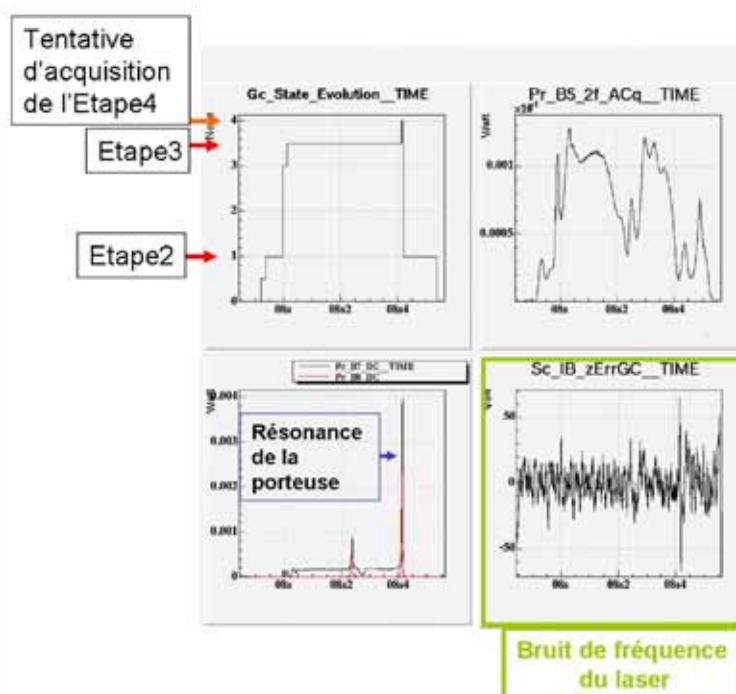


FIG. 5.27: Tentative de lock de Virgo.

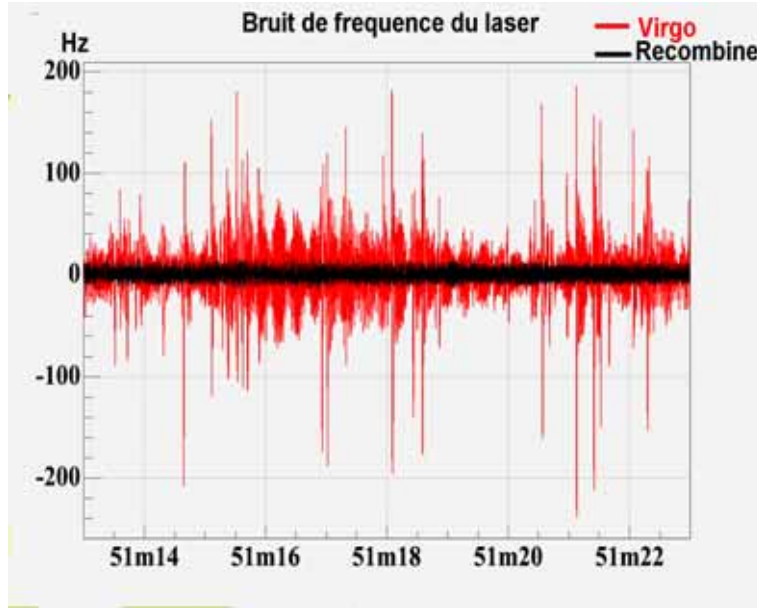


FIG. 5.28: Comparaison du bruit de fréquence entre Virgo et l'interféromètre en mode recombiné.

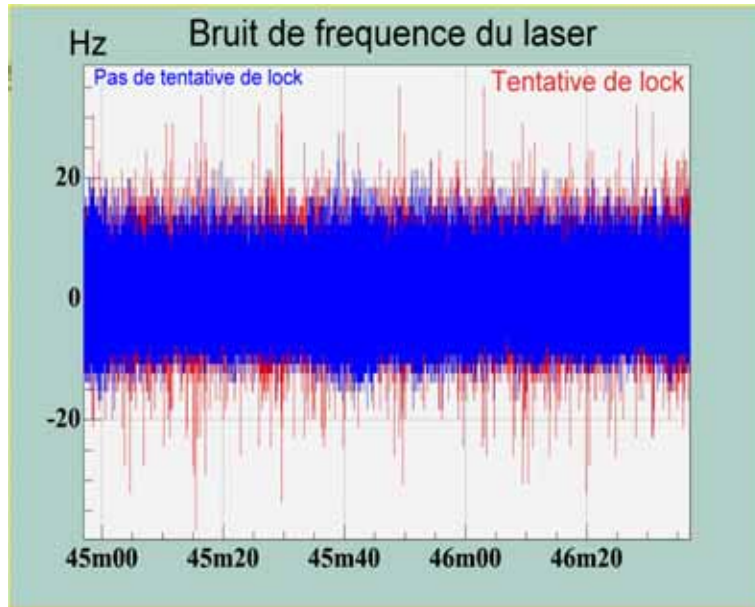
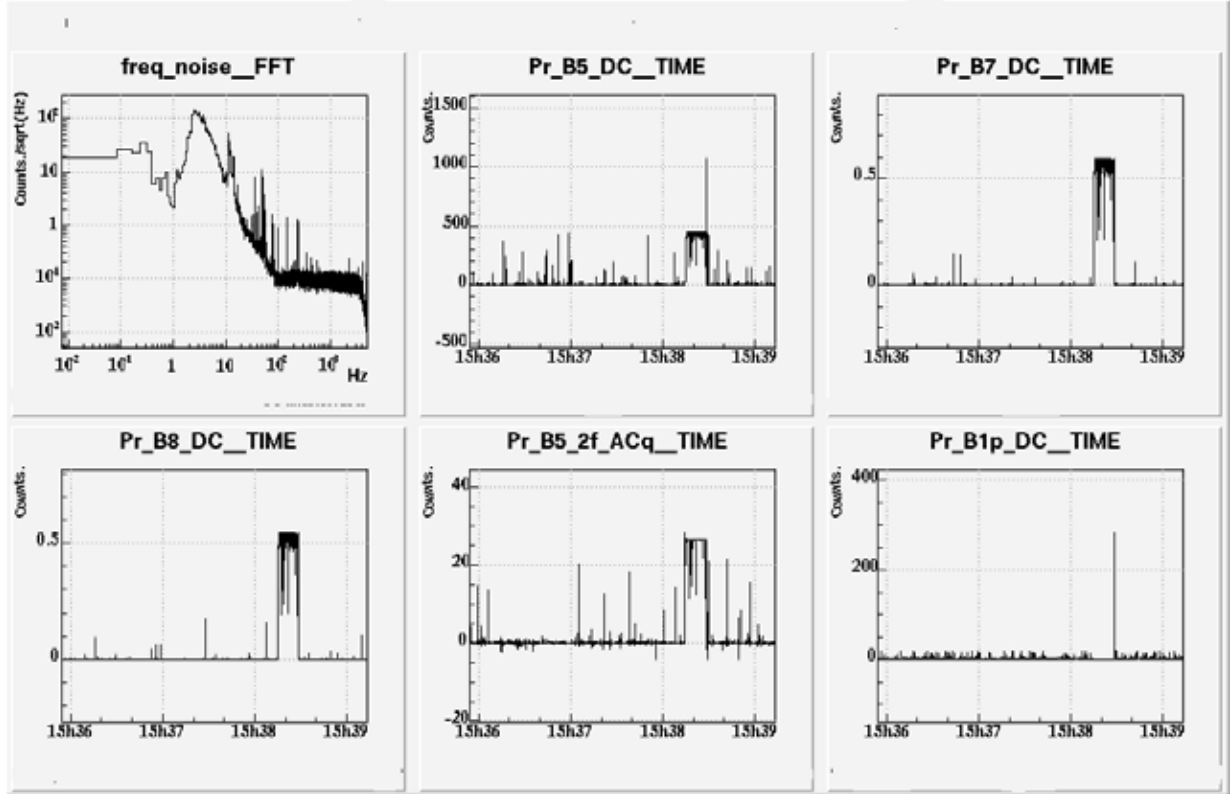


FIG. 5.29: Comparaison du bruit de fréquence pendant les tentatives de lock et sans tentative de lock.

#### *Comparaison du bruit de fréquence entre l'interféromètre recombiné et Virgo*

Nous avons une augmentation du bruit de fréquence du laser, consécutive à l'alignement du miroir de recyclage (voir figure 5.28). En effet, lorsque ce miroir est aligné, la lumière réfléchie par l'interféromètre se combine avec la lumière présente dans le mode cleaner. Puisque le mode cleaner est utilisé pour stabiliser en fréquence le laser, nous induisons une augmentation du bruit de fréquence de celui-ci. De plus, nous pouvons voir que ce bruit augmente avec les tentatives de lock (voir figure 5.29).



**FIG. 5.30:** Tentatives d'acquisition du lock avec le bruit de fréquence du laser mesuré sur l'instrument.

Nous avons voulu évaluer l'impact de l'augmentation du bruit de fréquence en incluant dans la simulation d'acquisition du lock le bruit de fréquence mesuré réellement. La simulation a montré que nous pouvons aller jusqu'à l'Etape4 mais que nous ne restons pas locké (voir figure 5.30). Un travail pour réduire le bruit de fréquence du laser est donc nécessaire pour espérer locker Virgo avec cet algorithme.

#### *Les franges d'interférence sur B2*

Les signaux d'erreurs issus de la photodiode B2 sont utilisés pour locker l'interféromètre. Cependant, pour la même raison que pour le bruit de fréquence du laser, l'alignement du miroir PR a produit des franges d'interférences sur la photodiode B2. Nous pouvons les voir par exemple lorsque l'Etape3Nord est lockée (voir figure 5.31).

Pour répondre durablement à ces problèmes, un nouveau banc d'injection est en cours d'élaboration. Son apport par rapport au précédent banc d'injection provient de l'utilisation d'un isolateur de Faraday. Cet élément optique permettra d'atténuer très fortement la lumière réfléchie par l'interféromètre, et nous espérons par son intermédiaire éliminer les franges d'interférence parasites et réduire le bruit de fréquence du laser. Ce nouveau banc d'injection devrait être installé durant l'automne 2005.

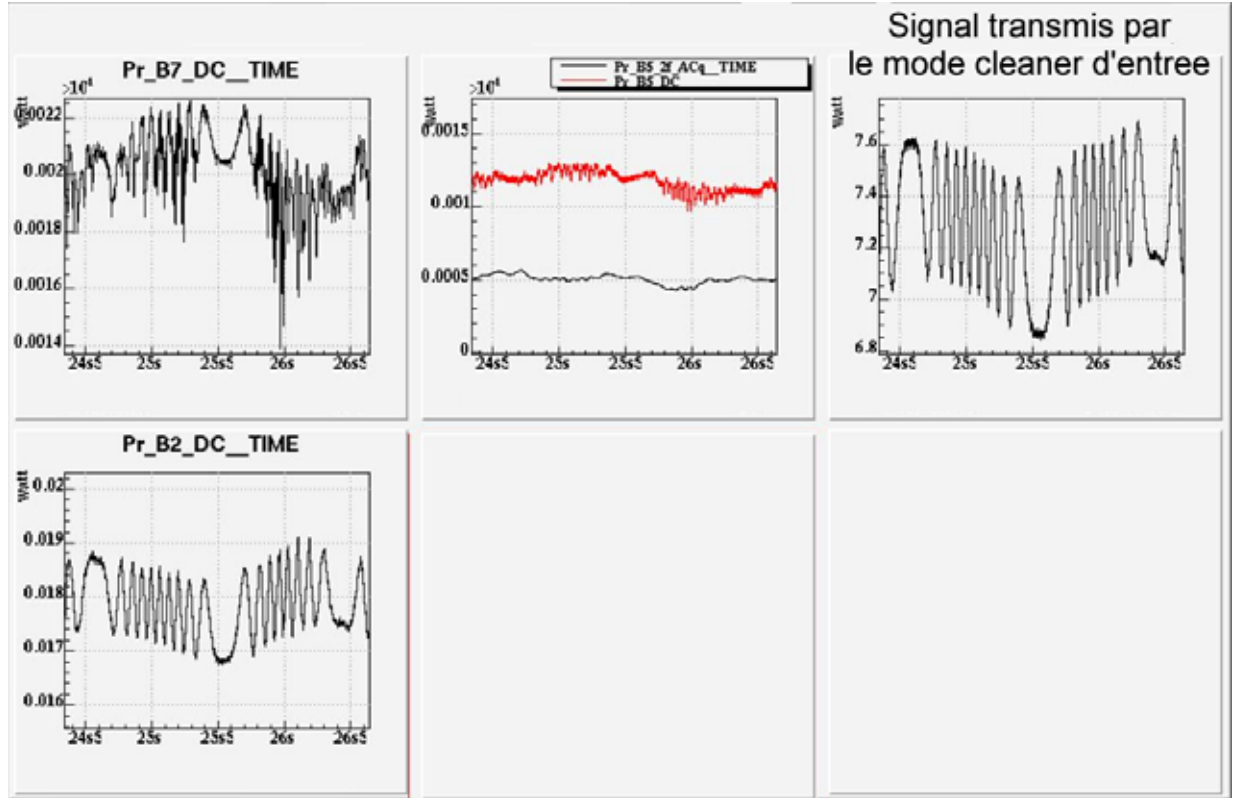


FIG. 5.31: Frange sur B2 lorsque l'Etape3Nord est locké.

### Le miroir de recyclage

Un autre paramètre à prendre en compte dans la boucle d'asservissement pour contrôler la longueur PRCL est la contribution des résonances mécaniques du miroir composite PR. Cet effet limite aujourd'hui le gain du filtre de compensation utilisé pour le contrôle de la longueur PRCL. Ainsi, avec l'installation du nouveau banc d'injection, un nouveau miroir de recyclage va être installé. Ce sera un miroir monolithique et sa réflectivité sera de 95 %. Nous aurons alors une augmentation du gain de recyclage.

L'impact des différents problèmes énumérés précédemment ont diminué après avoir réduit la puissance entrant dans l'interféromètre. Nous avons repris à partir de là une nouvelle campagne de tentative de lock de Virgo.

	Succès	Min (ms)	Max (ms)	Moyenne (ms)	Durée entre Acq (ms)
Etape2	75%	2.5	361	65	5531
Etape3BrasNord	90%	14.1	390	145	12499
Etape3BrasOuest	92%	7.7	750	196	18801
Etape4	13.5%	6.2	500	56.5	11800

TAB. 5.1: Statistiques sur les tentatives de lock de Virgo.

## 5.2. ACQUISITION DU LOCK MULTI-ÉTAPE

Nous avons mis en place un outil statistique, qui nous permet d'optimiser les paramètres du lock en évaluant l'effet des changements sur les gains optiques, les phases de démodulation, les filtres de compensation... durant les tentatives de lock de VIRGO. Le tableau 5.1 en présente un exemple. Décrivons ce que signifie les différents éléments de ce tableau :

- Min : Temps minimal de lock de l'Étape en ms.
- Max : Temps maximal de lock de l'Étape en ms.
- Moyenne : Temps moyen de lock de l'Étape en ms.
- Durée entre Acq : Temps moyen entre deux acquisitions du lock de l'Étape.
- Succès : Pourcentage de réussite d'une tentative de lock. Nous parlons de succès dès lors que nous restons dans l'Étape plus de 15 ms.

### Puissance en sortie des bras **NORD** et **OUEST**

#### Puissance dans la cavité de recyclage

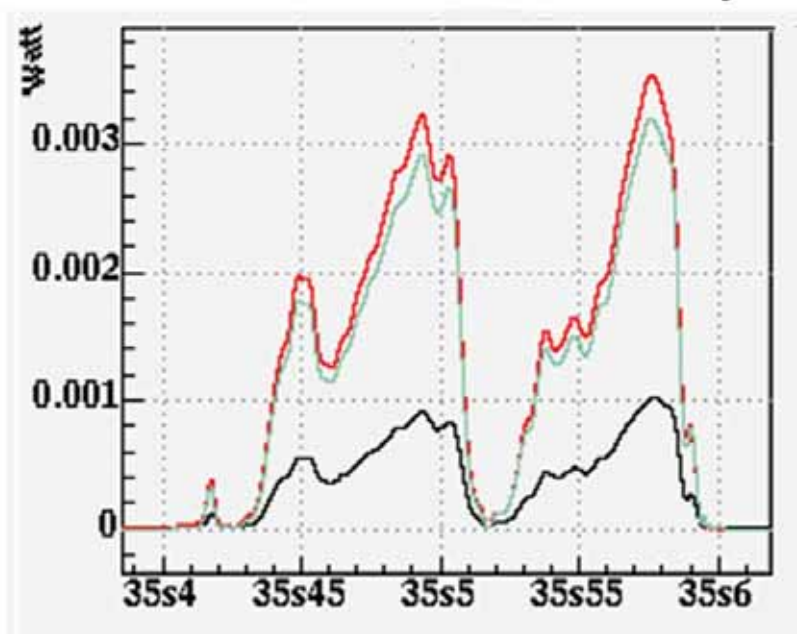


FIG. 5.32: Tentative de lock de Virgo.

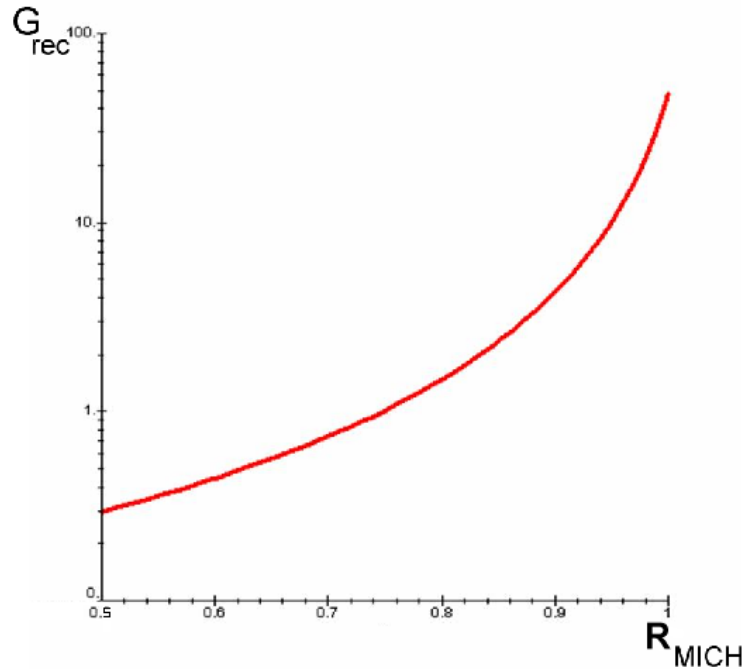
Le lock le plus long que nous avons obtenu a été de près de 500 ms (voir figure 5.32). Après ce succès mitigé, nous avons mis à profit notre expérience sur le recombinaison pour élaborer un nouvel algorithme de lock de Virgo. Ce sera le thème de la partie qui suit.

### 5.3 Algorithme de Lock à Finesse Variable

Deux idées directrices sont à la base de cet algorithme :

- nous minimisons le couplage entre tous les signaux d'erreurs en réduisant le gain de recyclage. Nous nous trouvons ainsi dans une situation semblable à celle rencontrée pour le lock du mode recombiné ;
- beaucoup de signaux d'erreurs sont contaminés par la composante qui dépend de la longueur CARM. Nous allons réduire sa contribution par l'intermédiaire de la SSFS (voir Chapitre 4). Dans le même temps nous réduirons le bruit de fréquence du laser responsable majeur de l'échec du lock de VIRGO avec l'utilisation de l'algorithme itératif.

#### 5.3.1 Réduire temporairement le gain de recyclage



**FIG. 5.33:** Evolution du gain de recyclage en fonction de la réflectivité équivalente du Michelson.

Le gain de recyclage est défini par la relation suivante :

$$G_{rec} = \frac{t_{PR}^2}{(1 - r_{PR} r_{MICH})^2} \quad (5.66)$$

Il est fonction de la réflectivité équivalente du Michelson (voir figure 5.33). Cette réflectivité dépend de l'état de la frange en sortie du Michelson. Ainsi, locker à un endroit différent de la frange noire permet de réduire le gain de recyclage et aussi la finesse de la cavité de recyclage (raison du nom donné à l'algorithme d'acquisition du lock).

C'est ce que nous ferons, en utilisant le signal B1p\_DC pour contrôler la longueur MICH. De plus, nous désalignons le miroir PR de 10  $\mu$ rad. Ceci permet de réduire artificiellement la réflectivité du miroir PR. Le gain de recyclage est encore diminué ainsi que la finesse de la cavité. Le lock de la longueur PRCL en est donc facilité.

#### 5.3.2 Réduire la composante CARM dans les signaux d'erreurs

La composante CARM est très importante quand nous entrons dans l'Etape4 de l'algorithme de lock itératif. Comme nous l'avons vu pour l'interféromètre recombinaison (voir Chapitre 4), la SSFS permet de contrôler cette longueur. Nous réduisons ainsi le bruit de fréquence du laser et nous éliminons la composante CARM dans les signaux d'erreurs. Pour cela, le fait de désaligner le miroir PR permet de nous trouver dans une situation semblable à celle du recombinaison. Dans ce dernier, nous désalignons le miroir PR de près de 1 mrad alors que pour VIRGO nous le désalignons de 10  $\mu$ rad. Ce facteur 100 permet de contrôler une nouvelle longueur (PRCL) par rapport au mode recombinaison de l'interféromètre et réduit la contribution de la lumière rétrodiffusée par VIRGO vers le mode cleaner.

#### 5.3.3 Algorithme de lock

C'est un lock déterministe passant par des états stables, reproductible et aisément automatisable. Nous utilisons la même linéarisation des signaux d'erreurs, les mêmes filtres de compensation et la même matrice de répartition que ceux utilisés avec l'algorithme d'acquisition du lock itératif.

L'acquisition du lock se fait en plusieurs étapes. Nous allons dans ce qui suit en décrire le déroulement :

- Etape 1 : Comme dit précédemment le miroir de recyclage est désaligné de 10  $\mu$ rad. Nous utilisons le signal B2\_3f\_ACp pour contrôler la longueur PRCL. Nous lockons à mi frange l'interféromètre de Michelson en utilisant le signal B1p\_DC. Le lock des cavités Fabry-Perot est obtenu de manière indépendante avec les signaux d'erreurs B7\_ACp et B8\_ACp (voir figure 5.34).
- Etape 2 : Dans cette deuxième étape, nous contrôlons les longueurs CARM et DARM respectivement par l'utilisation de la SSFS et du signal d'erreur B8\_ACp. Aucun ajustement n'est nécessaire quand à la phase de démodulation sur B8\_ACp (voir figure 5.35). Le miroir de recyclage PR est toujours désaligné.
- Etape 3 : Dans cette troisième étape, nous alignons le miroir PR. Nous sommes réellement dans la configuration optique de Virgo (voir figure 5.36).
- Etape 4 : À proximité de la frange noire le signal B1p\_DC n'est pas un signal d'erreur. Nous contrôlons alors la longueur MICH par la combinaison des signaux B1p\_DC et du signal d'erreur obtenu par la technique Pound Drever B5\_ACq (voir figure 5.37).
- Etape 5 : Nous sommes sur la frange noire, seul le signal B5\_ACq est utilisé pour contrôler la longueur MICH (voir figure 5.38).



- Etape 6 : Etant donné que le signal reçu par la photodiode B8 est faible, le contrôle de la longueur DARM est transféré sur le signal B1p\_ACq pour lequel le rapport signal sur bruit est meilleur (voir figure 5.39).
- Etape 7 : Enfin, après le lock du mode cleaner, nous utilisons le signal d'erreur B1\_ACq pour contrôler la longueur DARM. Nous sommes sur le point de fonctionnement de l'interféromètre (voir figure 5.40).

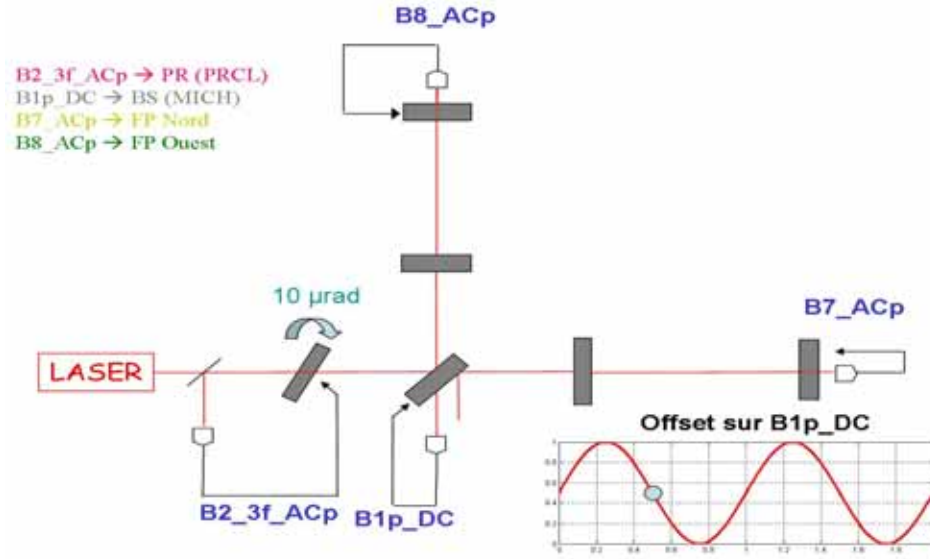


FIG. 5.34: Etape 1 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

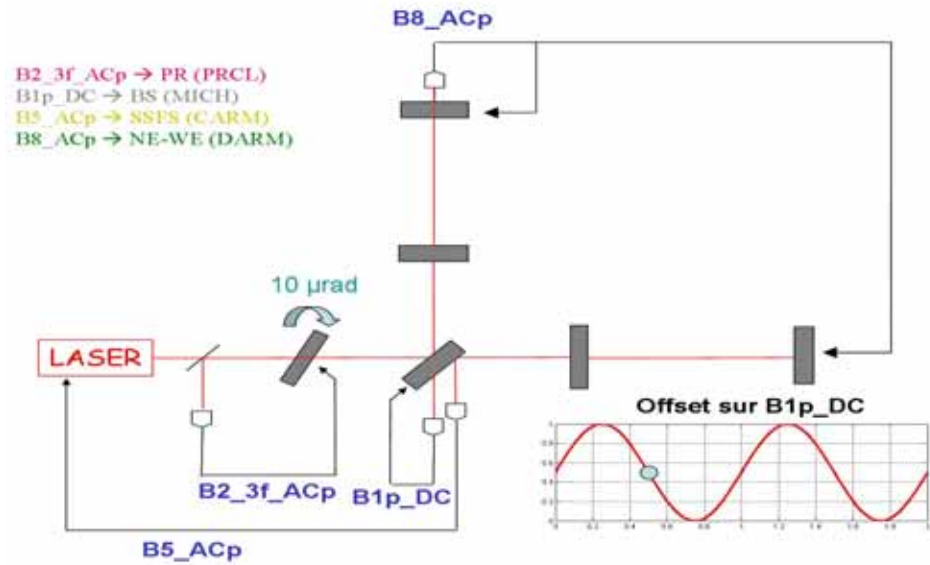


FIG. 5.35: Etape 2 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

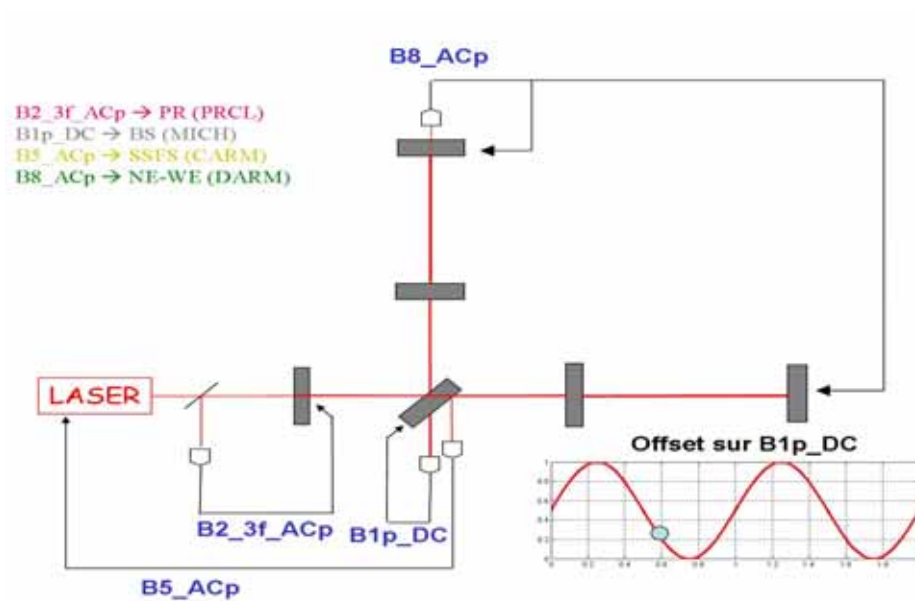


FIG. 5.36: Etape 3 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

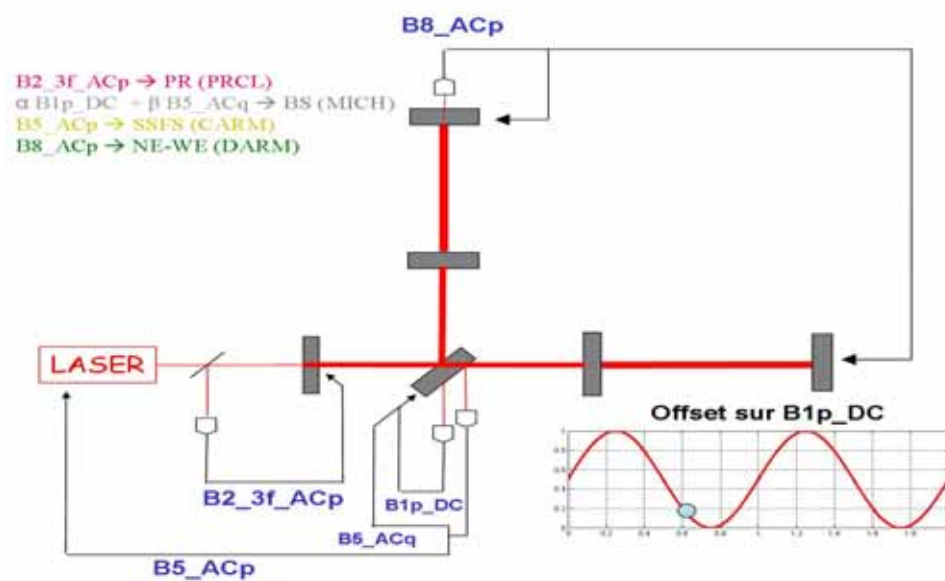


FIG. 5.37: Etape 4 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

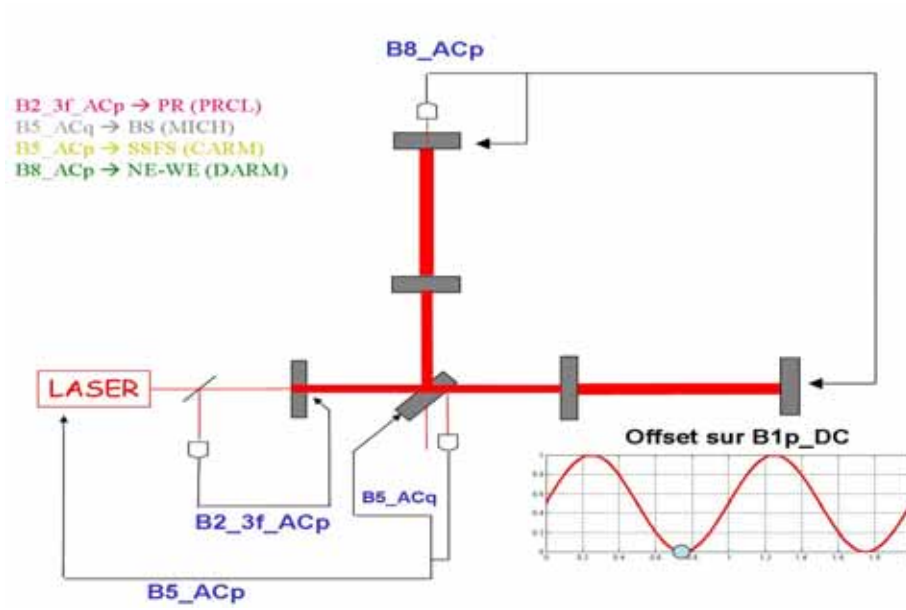


FIG. 5.38: Etape 5 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

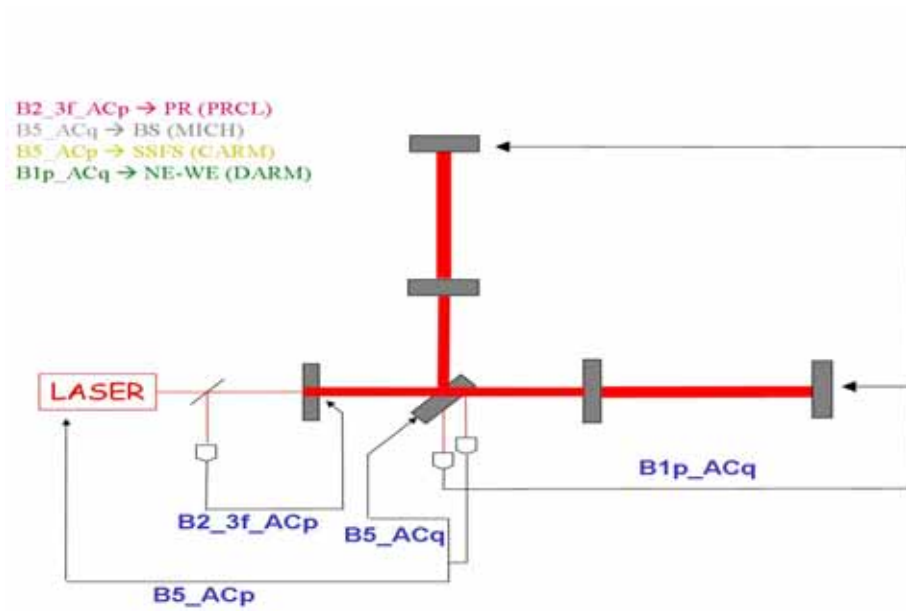


FIG. 5.39: Etape 6 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

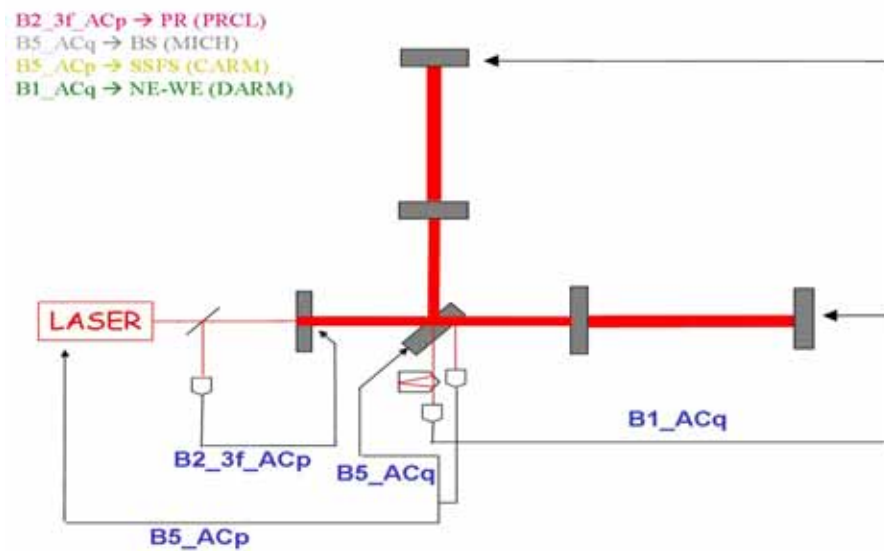


FIG. 5.40: Etape 7 de l'algorithme d'acquisition du lock à finesse variable.

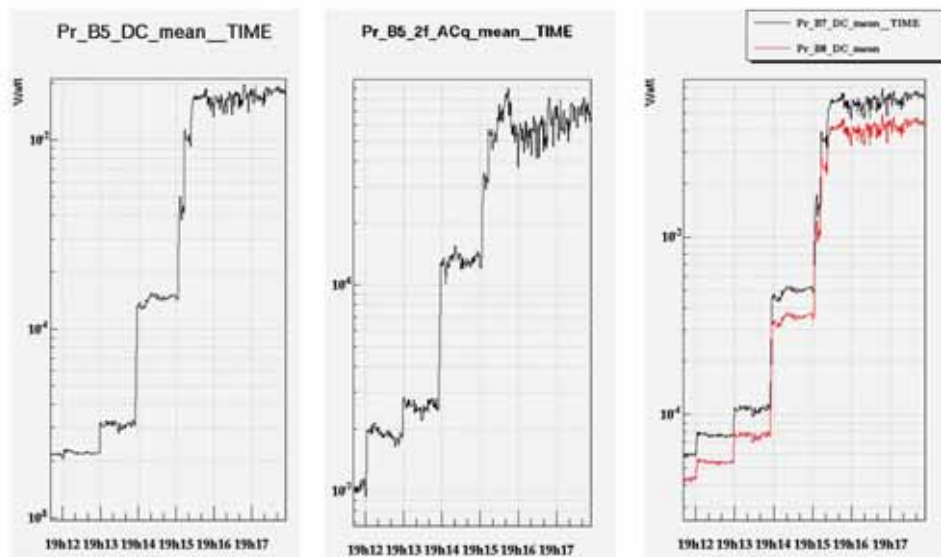


FIG. 5.41: Acquisition du lock de Virgo avec l'algorithme à finesse variable.

L'acquisition du lock de Virgo avec cet algorithme est illustré par la figure 5.41. Nous pouvons voir que la puissance passe par des paliers qui correspondent aux différentes étapes de l'acquisition du lock. Le passage entre ces différentes étapes s'effectue en changeant l'état de la frange en sortie du Michelson. Cet ajustement se fait à partir d'un facteur artificiel (offset) appliqué sur le signal d'erreur B1p\_DC.

L'avantage de cet algorithme déterministe ( finesse variable) par rapport à l'algorithme itératif (multi-étape) est qu'il permet d'arriver au point de fonctionnement de manière contrôlé et en quelques minutes. Il est de plus de par sa nature beaucoup moins dépendant des bruits environnementaux.

### 5.3.4 Le Run C5

Le run C5 a eu lieu du 2 Décembre au 7 Décembre 2004. Les conditions du run étaient les suivantes :

- nous avons pris des données avec l'interféromètre recombinaé dans les mêmes conditions que C4 avec cependant moins de puissance entrant dans l'interféromètre ;
- prise de données avec Virgo locké en recyclé sur le point de fonctionnement.

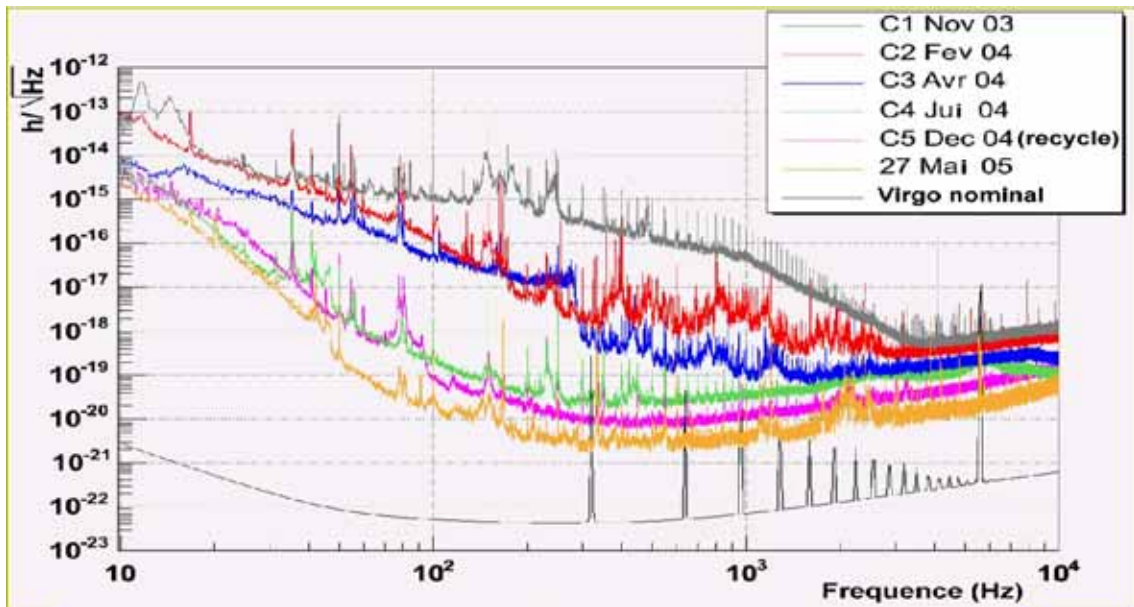
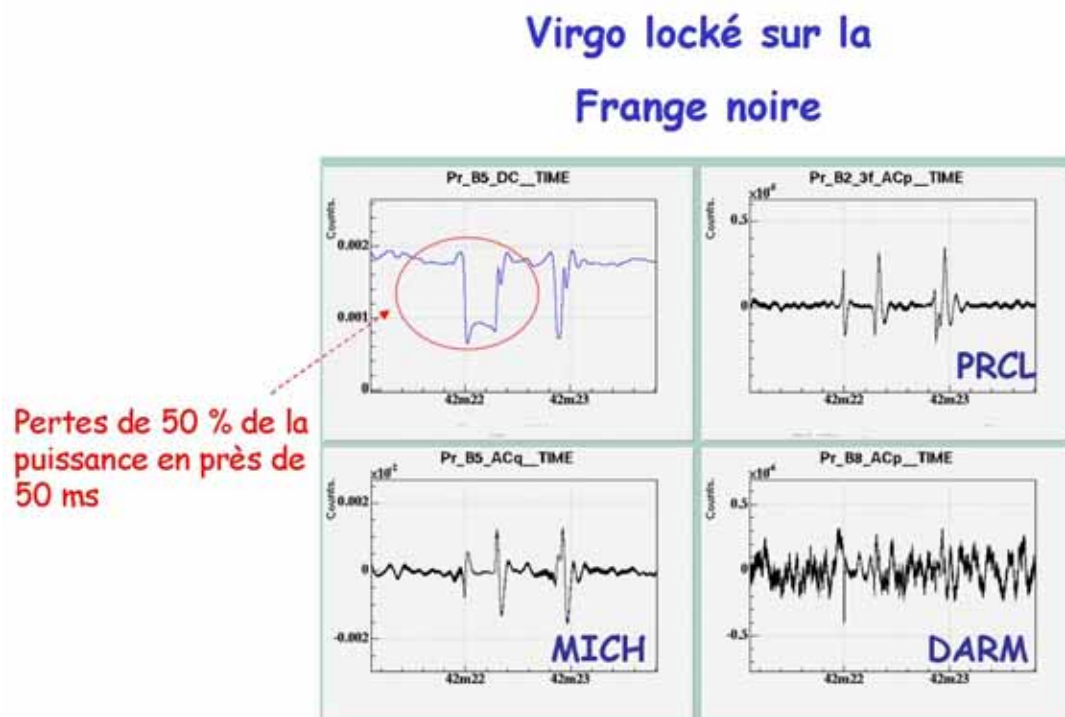


FIG. 5.42: Comparaison des différentes courbes de sensibilités obtenues durant les runs et une prise de données du 27 Mai 2005.

La figure 5.48 illustre la comparaison des différentes courbes de sensibilité pour les différents runs. La prise de données du 27 Mai 2005 correspond à un état très stable de l'interféromètre après des améliorations faites sur les contrôles locaux. À basse fréquence ( $< 100$  Hz), les bruits de contrôle dominant surtout celui introduit par l'asservissement de la longueur MICH. Entre 100 Hz et 500 Hz, Au delà, les contributions à la courbe de sensibilité seraient du au comportement non linéaire des DAC. A haute fréquence ( $> 500$  Hz), le bruit électronique est dominant.

Comme nous pouvons le constater, sur la courbe de sensibilité du 27 Mai 2005 beaucoup de travail reste à faire pour réduire la contribution des différents bruits et ainsi arriver à la courbe de sensibilité nominale. Depuis le run C5, un problème est apparu sur l'interféromètre, les “jumps” qui retardent cette chasse au bruit.

### 5.3.5 Les “jumps”



**FIG. 5.43:** Exemple d'un jump.

Ce sont des sauts dans la puissance dont la durée est de près de 50 ms (voir figure 5.43). Ces jumps peuvent delocker l'interféromètre. Ils ne permettent pas d'avoir un système stable. Plusieurs hypothèses ont été faites pour les expliquer. Certaines de ces hypothèses émises par la collaboration ne peuvent être rationnellement considérées comme causes de ces jumps. Cependant, leur étude a permis de mieux comprendre les caractéristiques optiques du détecteur.

#### La longueur macroscopique PRCL ?

Nous avons supposé que la longueur macroscopique PRCL (ou  $l_r$ ) était mauvaise ce qui modifierait le comportement de chacune des BL dans la cavité de recyclage. Nous l'avons donc mesurée pour savoir si elle correspondait à la longueur optimale. La méthode adoptée pour la mesure de la longueur de recyclage est la suivante :

- comparer les deux configurations optiques “lockés” suivantes : l'interféromètre recombinaison et Virgo ;
- faire un mouvement différentiel des bras (DARM) et comparer la phase de démodulation optimale sur le port antisymétrique pour les deux configurations optiques ;

- utiliser la simulation pour remonter à partir de cette différence de phase à la longueur de recyclage.

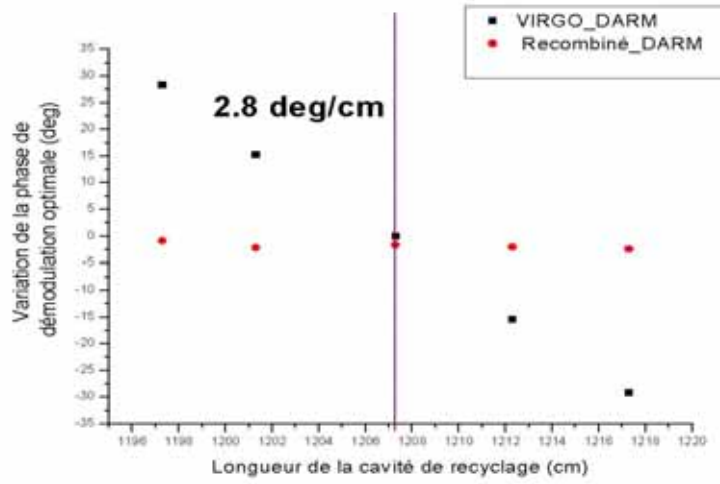
Dans la configuration optique de Virgo, le signal sur le port antisymétrique s'écrit :

$$B1\_ACq = \beta(f) \text{ DARM} \sin(\Omega t + \phi_{demod}(l_r)) \quad (5.67)$$

Dans la configuration optique du recombéné, le signal sur le port antisymétrique s'écrit :

$$B1\_ACq = \alpha(f) \text{ DARM} \sin(\Omega t + \phi_{demod}) \quad (5.68)$$

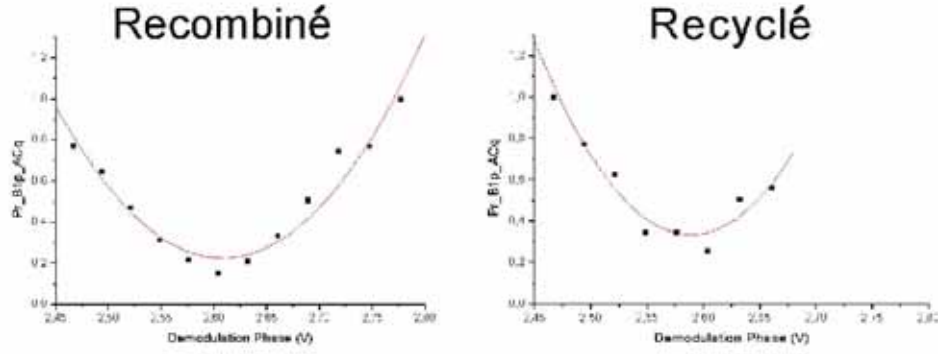
où  $\phi_{demod}$  est la phase de démodulation.



**FIG. 5.44:** Evolution dans le mode recombéné et pour Virgo de la phase de démodulation optimale en fonction de la longueur de recyclage.

La phase de démodulation sur le signal du port antisymétrique du mode recombéné n'est pas sensible à la longueur de recyclage alors que pour Virgo nous y sommes sensible. Cet effet est illustré sur la figure 5.44. La pente de la phase de démodulation optimale pour Virgo varie de 2.8 deg/cm par rapport à la longueur de recyclage optimale (12.073 m).

Nous avons à partir de là, évalué l'écart à cette longueur à partir de la différence de phase optimale mesurée expérimentalement entre le mode recombéné et Virgo (voir figure 5.45). Ainsi, à partir de la différence de phase mesurée expérimentalement qui est de  $0.71 \pm 0.23$  deg, la longueur de recyclage estimée est de  $12.073 \pm 0.005$  m. Nous sommes très proches de la longueur de recyclage optimale. Il faut cependant pondérer ce résultat par la précision expérimentale et par le fait que la simulation ne reproduit pas avec suffisamment d'exactitude les mesures expérimentales. Mise à part ces réserves qui ne changent pas fondamentalement le résultat, l'hypothèse selon laquelle les jumps sont la conséquence d'une mauvaise longueur de recyclage peut être exclue.



**FIG. 5.45:** Comparaison de la phase de démodulation optimale obtenue par ajustement des données sur le recombiné et Virgo.

#### *Effet étalon sur la longueur de recyclage optimale*

Nous avons suspecté l'augmentation de puissance dans les cavités Fabry-Perot comme éventuellement responsable de l'asymétrie de comportement des BL dans la cavité de recyclage par l'effet étalon. Celui-ci s'explique par le fait que les miroirs ont une certaine épaisseurs et sont constitués de deux faces. Nous pouvons donc avoir la création d'une cavité Fabry-Perot entre ces deux faces. La longueur optique de cette cavité peut changer de plusieurs longueurs d'ondes avec la température. Cet effet modifie la réflectivité totale de la cavité Fabry-Perot.

La longueur de recyclage ( $l_r$ ) permet de déterminer la fréquence de modulation du faisceau laser :

$$f_{modulation} = \frac{c}{4l_r} \quad (5.69)$$

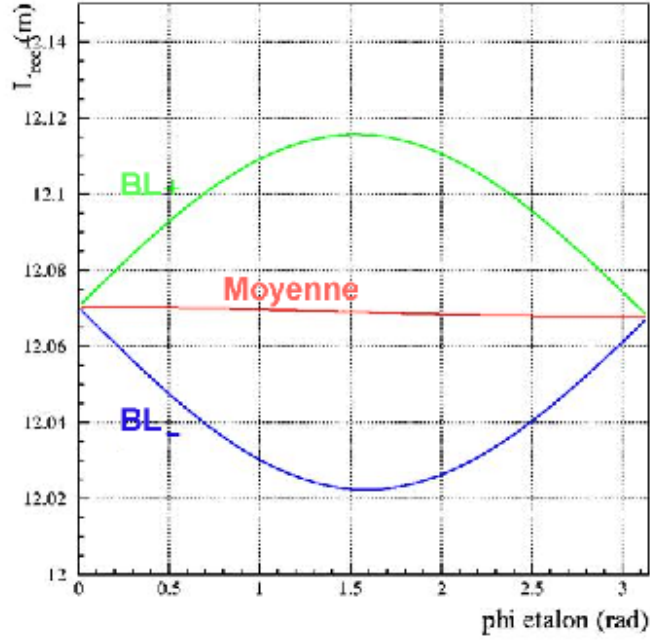
Ainsi, si la fréquence de modulation n'est pas optimale, le recyclage des BL est affecté et nous avons une asymétrie de comportement des BL. Ceci peut ensuite affecter le signal utilisé pour extraire l'onde gravitationnelle. Pour évaluer l'impact de l'effet étalon sur la longueur de recyclage optimale, nous avons effectué des simulations avec SIESTA et Finesse [82].

Les résultats sont présentés sur la figure 5.46 et le tableau 5.2. Nous constatons que la longueur de recyclage optimale est différente pour chacune des BL mais reste en moyenne celle prévue.

	Longueur de recyclage optimale
Pas d'effet étalon	1207.3 cm
$R_{WI} = 0.88 ; R_{NI} = 0.8754$	1207.5 cm
$R_{WI} = 0.88 ; R_{NI} = 0.8843$	1207.1 cm
$R_{WI} = 0.8754 ; R_{NI} = 0.88$	1207.5 cm
$R_{WI} = 0.8843 ; R_{NI} = 0.88$	1207.1 cm

**TAB. 5.2:** Evolution de la longueur de recyclage optimale en fonction de l'effet étalon reproduit en changeant la phase introduite par la cavité Fabry-Perot formé par les deux faces des miroirs d'entrée des cavités Fabry-Perot.





**FIG. 5.46:** Comparaison de la phase de démodulation optimale obtenue par ajustement des données sur le recombéné et Virgo.

Nous voyons que la modification apporté par l'effet étalon sur la longueur de recyclage optimale est proche de 2 mm. Cette valeur est bien inférieure à la précision expérimentale. Cet effet n'est donc pas mesurable et affecte très peu le comportement des BL.

### L'asymétrie de Schnupp ?

Nous avons voulu par la suite évaluer, la transmittivité des BL sur la frange noire, et pour cela l'évaluation de l'asymétrie de Schnupp est nécessaire. Cette asymétrie permet aux BL de ne pas être sur la frange noire et donc de pouvoir transmettre par leur battement avec la porteuse le signal gravitationnel. Nous avons voulu vérifier, si cette asymétrie était optimale.

La méthode adoptée pour mesurer l'asymétrie de Schnupp (différence de longueur entre les bras du Michelson) consiste à locker chacune des cavités Fabry-Perot à partir du signal B1p\_ACq ou B1\_ACq et de mesurer la différence de phase de démodulation obtenue pour découpler au mieux le système. Cette différence est directement sensible à l'asymétrie de Schnupp, selon la relation suivante :

$$\Delta l = \frac{1}{2} \frac{c}{\Omega} \Delta \phi_{\text{Démodulation}} \quad (5.70)$$

La valeur estimée expérimentalement est :  $\Delta l = (0.84 \pm 0.01)$  m. Cette valeur est compatible avec la valeur optimale qui est de 0.8479 m.

Nous venons de voir que les longueurs macroscopiques  $l_r$  et  $\Delta l$  qui peuvent avoir une influence sur le comportement des bandes latérales et donc sur les signaux d'erreurs sont proches de leurs valeurs optimales.

Par conséquent, associer le problème des jumps qui coïnciderait avec une mauvaise longueur macroscopique peut être exclue. De plus, envisager qu'un jump dont l'événement ne dure qu'une cinquantaine de milliseconde puisse être provoqué par un déplacement d'une longueur macroscopique semble irréaliste.

#### Les signaux d'erreurs et les zéros multiples ?

Dans la plupart des cas, nous ne perdons pas le lock quand un jump apparaît. En revanche, nous perdons énormément de puissance dans l'interféromètre (voir figure 5.43), ce qui signifie que nous sommes également dans un état stable. Alors, nous avons supposé que le signal d'erreur possédait plusieurs zéros et que nous pouvions acquérir le lock à différents endroits. Pour le moment nous n'avons pas réussi à les reproduire en simulation.

Dernièrement, nous nous sommes rendus compte que les photodiodes utilisées pour l'acquisition du lock n'étaient pas bien alignées par rapport aux faisceaux. Dès que nous les avons réalignés, nous avons pu rester locké très longtemps (prise de données du 27 Mai 2005) sans présence de jumps. Après un réalignement du banc d'injection, les jumps sont réapparus. Nous avons de plus remarqué, que les jumps étaient reliés aux mouvements angulaires des miroirs. La collaboration travaille donc maintenant pour résoudre le problème des jumps à la compréhension de l'effet introduit par le désalignement des faisceaux sur les photodiodes qu'induit le mouvement du banc d'injection.

Les jumps ont disparu dès lors que nous avons ramené la position du banc d'entrée à celle de novembre 2004 précédant l'apparition des jumps. Nous avons également changé de 45 degrés la phase de démodulation du signal B2\_3f en optimisant le rapport  $\frac{B2\_3f\_ACp}{B2\_3f\_ACq}$  après le lock du CITF. A partir de là la collaboration a décidé de faire une nouvelle prise de donnée : le run C6.

#### 5.3.6 Le Run C6

Le run C6 a eu lieu du 29 Juillet au 12 Août 2005. Les conditions du run étaient les suivantes :

- configuration recyclé, avec la longueur DARM contrôlée à partir du signal B1\_ACp. De plus une partie des corrections utilisées pour le contrôle de la longueur MICH sont envoyés sur les miroirs de fond des bras ;
- alignement automatique sur le miroir NE et contrôle en DC de la dérive des miroirs PR, NI, WI et WE.

La meilleure sensibilité est de  $6 \times 10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}$  autour de 700 Hz. Un travail d'identification des bruits a été fait et est illustré sur la figure 5.47.

À basse fréquence la sensibilité est limitée par les bruits de contrôles. Entre 100 Hz et 600 Hz, le bruit est dû à un comportement non linéaire des DAC. Au delà de 600 Hz, nous avons la contribution du shot noise et du bruit électronique sur B1 et le bruit de fréquence.

La courbe 5.48 montre l'évolution en terme de sensibilité de l'instrument au cours du commissioning. La sensibilité de C6 est au mieux à un facteur 100 au dessus de la sensibilité nominale de Virgo.

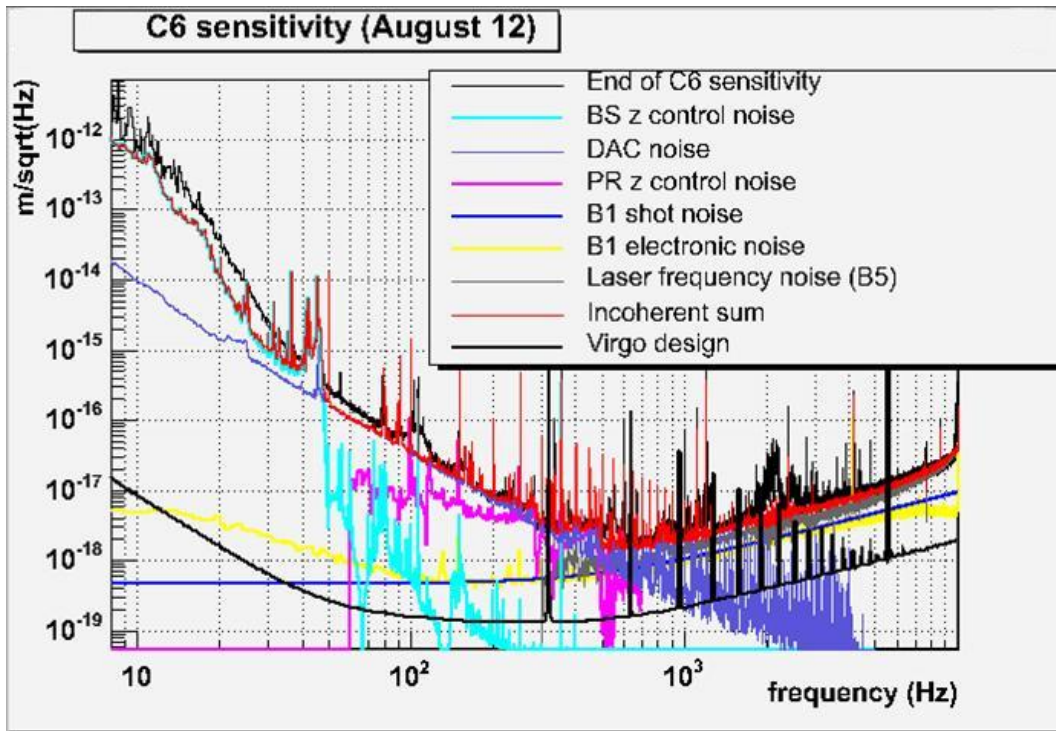


FIG. 5.47: Identification des bruits dans la courbe de sensibilité de C6.

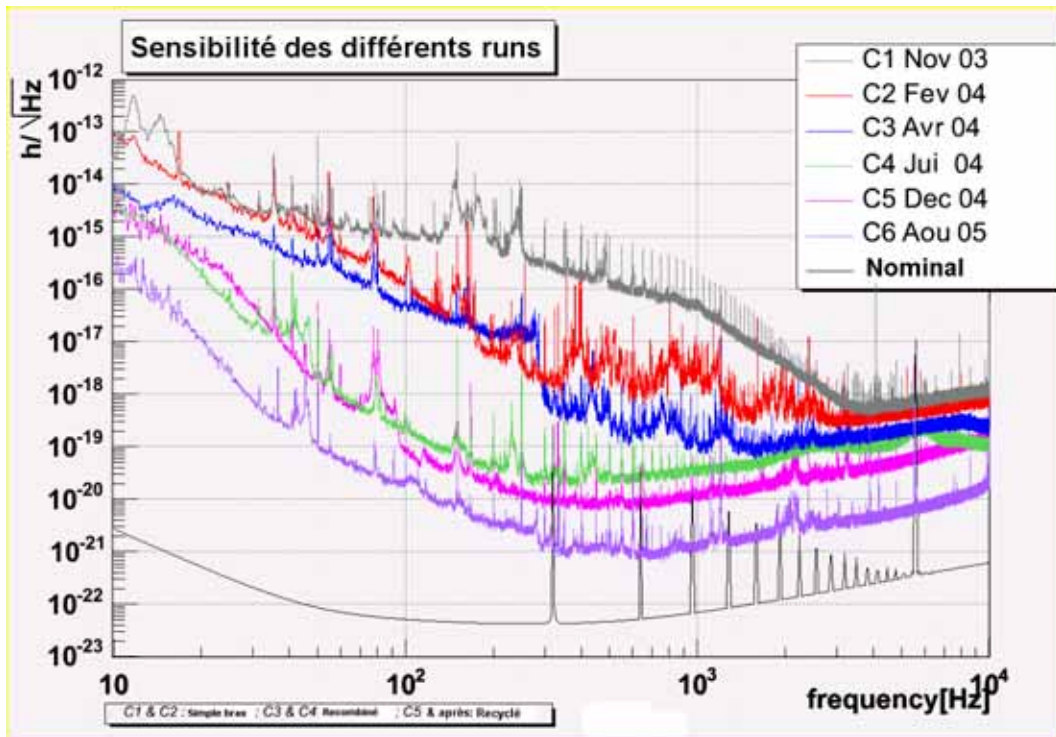


FIG. 5.48: Comparaison des différentes courbes de sensibilités obtenues durant les différents runs.

# Chapitre 6

## L'offset d'Anderson

Nous avons vu dans les chapitres précédents que nous sommes capables d'acquérir le lock. Cependant, pour que le lock soit stable l'Alignement doit fonctionner. La méthode employée pour l'Alignement[45] des miroirs est une combinaison des techniques d'Anderson [74] et de Ward [75]. VIRGO est le premier instrument à utiliser à grande échelle ces deux techniques pour le contrôle angulaire des miroirs. Les signaux d'erreurs employés pour ce contrôle sont produits par des photodiodes à quadrants<sup>1</sup>, qui donnent une mesure précise de l'évolution du front d'onde du faisceau.

La technique d'Anderson nécessite un signal modulé comme la technique de Pound Drever. Ainsi, la fréquence de modulation combine l'intervalle spectral libre et l'écart en fréquence entre les résonances des modes TEM<sub>00</sub> et TEM<sub>10</sub> :

$$f_{Modulation} = N \frac{c}{2L} + f_{TEM_{00} \leftrightarrow TEM_{01}} \sim 6.26417 \text{ MHz} \quad (6.1)$$

avec  $N$  un nombre entier et  $L$  la longueur de la cavité Fabry-Perot.

La fréquence d'Anderson ( $f_{TEM_{00} \leftrightarrow TEM_{01}}$ ) est donnée par la relation suivante :

$$f_{TEM_{00} \leftrightarrow TEM_{01}} = \frac{c}{2\pi L} \arccos \left( \sqrt{1 - \frac{L}{R_{cc}}} \right) \sim 18 \text{ kHz} \quad (6.2)$$

avec  $R_{cc}$  le rayon de courbure du miroir de fond de la cavité Fabry-Perot.

Donc, la technique d'Anderson permet au mode TEM<sub>01</sub> d'une des BL de résonner en même temps que le mode TEM<sub>00</sub> de la porteuse dans les cavités Fabry-Perot.

Durant le travail expérimental sur le mode recombiné de l'interféromètre, nous nous sommes rendus compte que la technique d'Anderson avait un impact sur le signal Pound Drever employé pour le contrôle longitudinal des cavités.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les preuves expérimentales qui confirment l'implication de la technique d'Anderson dans la difficulté à maintenir un lock stable. Nous présenterons une explication théorique de ce mécanisme. Enfin, il s'agira de prévoir son impact sur la stabilité du lock de Virgo complet.

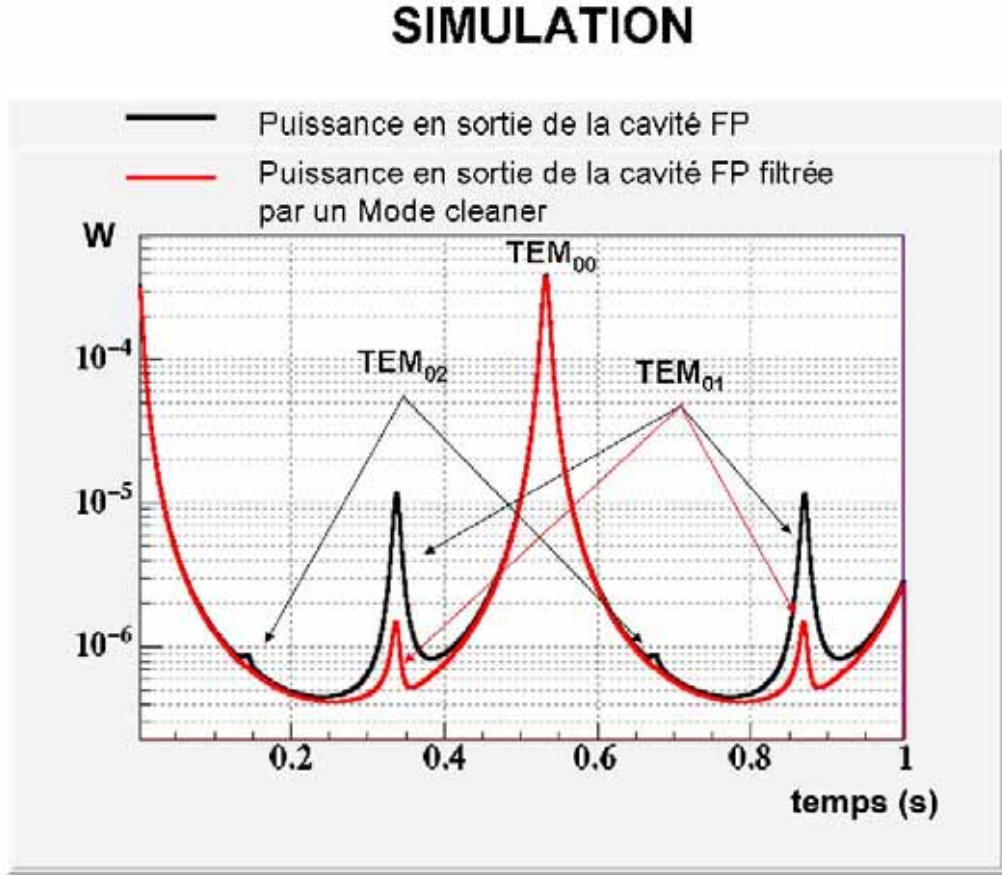
---

<sup>1</sup>Photodiode dont la partie réceptive est découpée en quatre éléments identiques.

## 6.1 L'offset d'Anderson dans le mode recombiné de Virgo

Avec l'utilisation du signal B1p\_ACp pour contrôler la longueur MICH, la durée du lock du recombiné n'excédait pas une cinquantaine de minutes. Ce problème a été résolu dès que nous avons utilisé le signal d'erreur B1\_ACp pour contrôler cette longueur. Ce signal est transmis par le mode cleaner de sortie. Décrivons plus en détail le fonctionnement d'un mode cleaner.

### Propriété du mode cleaner



**FIG. 6.1:** Comparaison du faisceau en entrée du mode cleaner (Noir) et du faisceau en sortie du Mode Cleaner (Rouge). La simulation est obtenue pour une vitesse de la cavité de  $10^{-6}$  m/s

Un mode cleaner est une cavité non dégénérée<sup>2</sup>. Si le mode fondamental résonne dans la cavité, la transmission est maximale pour ce dernier et décroît pour les autres modes selon la relation :

$$T_{mn} = T_{00} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi \Delta\nu_{mn}}{c} L\right)} \quad (6.3)$$

<sup>2</sup>Les fréquences de résonances des modes d'ordre supérieur sont différentes de celle du fondamental ( $TEM_{00}$ ).

où  $\Delta\nu_{mn}$  est la différence entre la fréquence du mode fondamental  $\text{TEM}_{00}$  et du mode  $\text{TEM}_{mn}$ ,  $\mathcal{F}$  la finesse de la cavité et  $L$  sa longueur.

Pour une cavité plano-concave (cas le plus simple d'une cavité non dégénérée), nous avons :

$$\Delta\nu_{mn} = \frac{c}{2L} (m + n) \frac{1}{\pi} \arccos(\sqrt{g}) \quad (6.4)$$

avec  $g = 1 - \frac{L}{R}$  et  $R$  le rayon de courbure du miroir concave.

L'effet de filtrage des modes d'ordres supérieurs par le mode cleaner est illustré sur la figure 6.1. Ainsi, le mode cleaner réduit de manière importante la contribution des modes d'ordres supérieurs sur le signal en sortie de celui-ci.

Nous avons suspecté qu'il y avait un rapport entre les modes d'ordres supérieurs présents dans les signaux d'erreurs et l'instabilité du lock du recombinaison. En effet, la technique d'Anderson permet au mode  $\text{TEM}_{01}$  d'une des BL de résonner en même temps que le mode  $\text{TEM}_{00}$  de la porteuse dans les cavités Fabry-Perot.

L'étude de ce que nous appelons l'offset d'Anderson a deux objectifs.

- Le premier est de comprendre son mécanisme de manière suffisamment précise pour expliquer les problèmes rencontrés durant le lock de l'interféromètre recombinaison.
- Evaluer son impact sur la stabilité du lock de Virgo.

### 6.1.1 Expérience

Nous parlons d'offset d'Anderson car nous lockons l'interféromètre à un endroit différent du point de fonctionnement, nous ne sommes pas à l'endroit pour lequel la puissance dans la cavité optique est extrémale.

L'offset d'Anderson s'observe lorsque nous figurons sur un axe le signal d'erreur et sur l'autre axe le signal en DC sur le port antisymétrique du Michelson. La figure 6.2 illustre la mesure effectuée en ayant locké les deux cavités Fabry-Perot et laissé libre le Michelson. Deux situations sont à distinguer pour expliquer l'apparition de l'offset d'Anderson. D'abord, nous appelons point de lock l'endroit pour lequel le signal d'erreur est nul. Il correspond à l'endroit sur lequel nous maintenons l'interféromètre. Le point de fonctionnement est le lieu pour lequel la puissance dans la cavité à contrôler est extrémale.

Dans la partie gauche de la figure 6.2 est représentée la courbe obtenue à l'aide du signal d'erreur en sortie du mode cleaner. Les points de lock et de fonctionnement coïncident. Par contre, en utilisant le signal d'erreur avant le mode cleaner de sortie, apparaît un désaccord entre le point de fonctionnement et le point de lock. C'est cette différence que nous appelons offset d'Anderson.

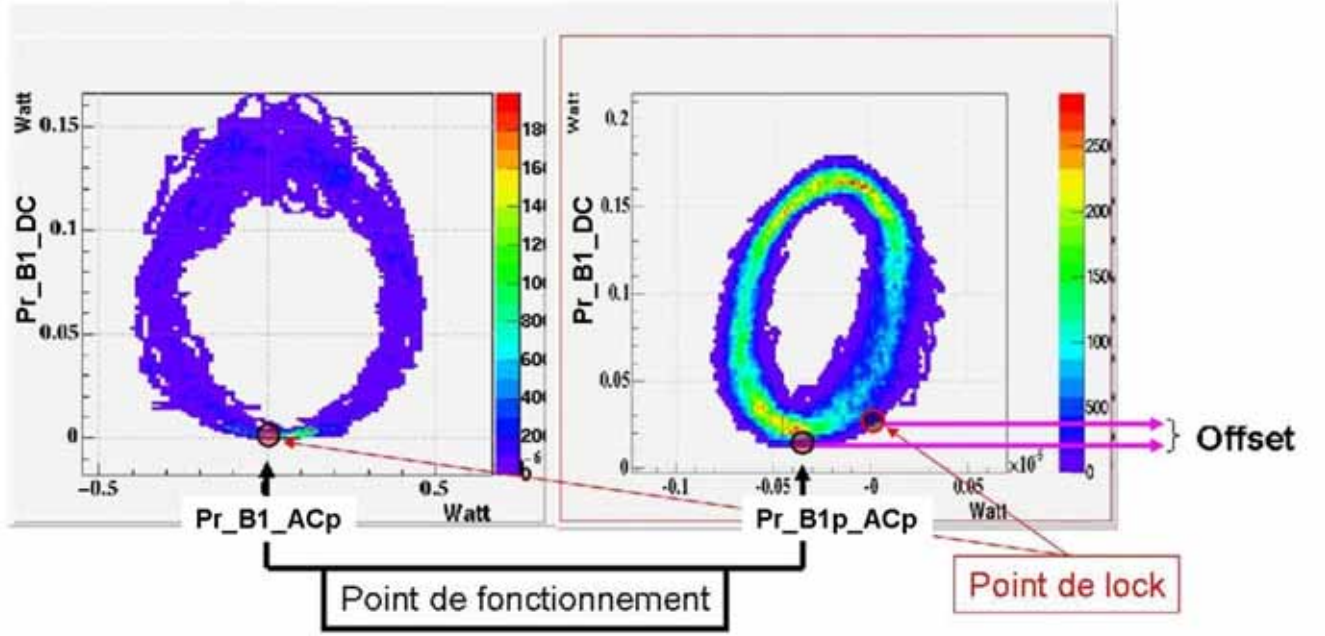


FIG. 6.2: Comparaison des figures obtenues expérimentalement, où le signal DC en sortie du mode cleaner (B1\_DC) est représenté en fonction des signaux d'erreurs après (B1\_ACp) le mode cleaner et avant (B1p\_ACp).

### D'où peut provenir cet offset ?

Quand nous sommes à la résonance, le signal d'erreur peut être assimilé à une droite d'équation  $g_{\text{optique}} \delta L + \text{Offset}$ . Les offsets peuvent avoir plusieurs origines (voir Annexe A).

- Mouvement angulaire des miroirs ("Tilt") en  $\theta_x$  et/ou  $\theta_y$  avec création de mode d'Hermitte Gauss ( $\text{TEM}_{10}$  ou  $\text{TEM}_{01}$ ) dans la cavité optique avec un terme de couplage  $a_i \theta_i$ .
- Décalage ( $\Delta_j$ ) entre l'axe du faisceau et l'axe de la cavité en angle et en position avec la création de mode de Hermitte Gauss ( $\text{TEM}_{10}$  ou  $\text{TEM}_{01}$ ) dans la cavité optique avec un terme de couplage  $b_j \Delta_j$ .

À l'ordre  $m + n \leq 1$ , seuls les termes  $a_i$  et  $b_j$  contribuent à l'offset. Les défauts de taille et de position du waist n'interviennent comme offset qu'à l'ordre  $m + n > 1$ .

### 6.1.2 Explication théorique

Dans cette partie, nous allons montrer comment le signal Pound Drever est perturbé par l'utilisation de la technique d'Anderson. Reprenons la définition de la réflectivité complexe d'une cavité Fabry-Perot en absence de perte :

$$\mathcal{R}(\omega) = \frac{r_1 + r_2 e^{-2i \frac{\omega}{c} L}}{1 + r_1 r_2 e^{-2i \frac{\omega}{c} L}} \quad (6.5)$$

avec  $r_1$  et  $r_2$  les réflectivités en amplitude des miroirs d'entrée et de fond de la cavité Fabry-Perot.

Nous pouvons définir la réponse d'une cavité Fabry-Perot avec désalignement comme suit (voir Annexe A) :

$$X_{FP_i}(\omega) = \left[ \left(1 - \frac{\alpha_i^2}{2}\right) \mathcal{R}_i(\omega) \psi_{00} + \alpha_i \mathcal{R}_i(\omega - \Delta\omega) \psi_{01} \right] \quad (6.6)$$

avec  $\Delta\omega$  la fréquence d'Anderson,  $\alpha$  le terme dû au désalignement des miroirs et  $i$  l'indice qui indique la cavité Fabry-Perot pour laquelle l'effet est étudié ( $i = N$  cavité Nord ;  $i = W$  cavité Ouest).

Etablissons l'expression du champ sur la photodiode B1p :

En supposant  $r_{BS} = t_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et en posant  $\Delta l = l_2 - l_1$  :

$$\frac{\psi_{B1p}(\omega)}{\psi_{in}(\omega)} \propto \left[ e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} X_{FP_N}(\omega) + i e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} X_{FP_W}(\omega) \right] \quad (6.7)$$

alors en utilisant la relation 6.6 nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{B1p}(\omega)}{\psi_{in}(\omega)} \propto & \left( \left(1 - \frac{\alpha_N^2}{2}\right) \mathcal{R}_N(\omega) \psi_{00} + \alpha_N \mathcal{R}_N(\omega - \Delta\omega) \psi_{01} \right) e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} \\ & + \left( \left(1 - \frac{\alpha_W^2}{2}\right) \mathcal{R}_W(\omega) \psi_{00} + \alpha_W \mathcal{R}_W(\omega - \Delta\omega) \psi_{01} \right) e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Pour simplifier, nous considérons par la suite un interféromètre symétrique :

$$\mathcal{R}_N(\omega) = \mathcal{R}_W(\omega) = \mathcal{R}(\omega)$$

La relation 6.8 peut donc se réécrire :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{B1p}(\omega)}{\psi_{in}(\omega)} \propto & \mathcal{R}(\omega) \psi_{00} \left[ e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} + e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \right] \\ & + \mathcal{R}(\omega) \psi_{00} \left[ -\frac{\alpha_N^2}{2} e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} - \frac{\alpha_W^2}{2} e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \right] \\ & + \mathcal{R}(\omega + \Delta\omega) \psi_{01} \left[ -\alpha_N e^{i\frac{\omega}{c}\Delta l} + \alpha_W e^{-i\frac{\omega}{c}\Delta l} \right] \end{aligned} \quad (6.9)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha_N + \alpha_W \text{ et } \beta' = \alpha_N^2 + \alpha_W^2 \\ \alpha'' &= \alpha_N - \alpha_W \text{ et } \beta'' = \alpha_N^2 - \alpha_W^2 \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{B1p}(\omega)}{\psi_{in}(\omega)} \propto & \left[ \mathcal{R}(\omega) \psi_{00} \left( -1 + \frac{1}{4} \beta' \right) - \frac{1}{2} \mathcal{R}(\omega + \Delta\omega) \psi_{01} \alpha' \right] \cos\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \\ & + \frac{i}{2} \left[ \mathcal{R}(\omega) \psi_{00} \frac{1}{2} \beta'' - \mathcal{R}(\omega + \Delta\omega) \psi_{01} \alpha'' \right] \sin\left(\frac{\omega}{c}\Delta l\right) \end{aligned} \quad (6.10)$$


---



Quand nous sommes lockés, les cavités Fabry-Perot sont résonnantes pour la porteuse ( $\mathcal{R}(\omega_0) = -1$ ) et antirésonnantes pour les bandes latérales ( $\mathcal{R}(\omega_0 \pm \Omega) = 1$ ). La technique d'Anderson implique que :

$$\mathcal{R}(\omega_0 + \Delta\omega) = 1; \mathcal{R}(\omega_0 + \Omega + \Delta\omega) = 1; \mathcal{R}(\omega_0 - \Omega + \Delta\omega) = -1; \quad (6.11)$$

En utilisant les relations 6.10, nous allons exprimer les champs sur la porteuse et les bandes latérales.

Pour la porteuse, le signal sur la frange noire s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{\text{B1p}}(\omega_0)}{\psi_{\text{in}}(\omega_0)} = & \left[ -\psi_{00} \left( -1 + \frac{1}{4} \beta' \right) - \frac{1}{2} \psi_{01} \alpha' \right] \cos \left( \frac{\omega_0}{c} \Delta l \right) \\ & + \frac{i}{2} \left[ -\psi_{00} \frac{1}{2} \beta'' - \psi_{01} \alpha'' \right] \sin \left( \frac{\omega_0}{c} \Delta l \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Pour les BL, le signal sur la frange noire est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{\text{B1p}}(\omega_0 \pm \Omega)}{\psi_{\text{in}}(\omega_0)} \propto & \left[ \psi_{00} \left( -1 + \frac{1}{4} \beta' \right) \mp \frac{1}{2} \psi_{01} \alpha' \right] \cos \left( \frac{\omega_0 \pm \Omega}{c} \Delta l \right) \\ & + \frac{i}{2} \left[ \psi_{00} \frac{1}{2} \beta'' \mp \psi_{01} \alpha'' \right] \sin \left( \frac{\omega_0 \pm \Omega}{c} \Delta l \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

### La puissance sur la photodiode B1p

Nous allons maintenant évaluer la puissance que nous mesurons sur la photodiode B1p. Au 2<sup>ème</sup> ordre en  $\alpha_N$  et  $\alpha_W$ , nous obtenons :

$$\frac{P_{\text{B1p}}}{|\psi_0|^2} \propto (|\psi_{00}|^2 [A + B \cos(2 \frac{\omega_0}{c} \Delta l)] + \frac{1}{2} |\psi_{01}|^2 (C + D \cos(2 \frac{\omega_0}{c} \Delta l))) \quad (6.14)$$

où :

$$\begin{aligned} A &= \left( 1 - \frac{1}{2} (\alpha_N^2 + \alpha_W^2) \right) \left[ \frac{J_0^2}{2} + J_1^2 \right] \\ B &= \left( 1 - \frac{1}{2} (\alpha_N^2 + \alpha_W^2) \right) \left[ \frac{J_0^2}{2} + J_1^2 \cos \left( 2 \frac{\Omega}{c} \Delta l \right) \right] \\ C &= (\alpha_N^2 + \alpha_W^2) \left[ \frac{J_0^2}{2} + J_1^2 \right] \\ D &= \alpha_N \alpha_W \left[ \frac{J_0^2}{2} + J_1^2 \cos \left( 2 \frac{\Omega}{c} \Delta l \right) \right] \end{aligned}$$

Le signal que nous mesurons après le mode cleaner de sortie est donné en considérant que  $|\psi_{01}|^2 = 0$  et nous obtenons :

$$\frac{P_{\text{B1p}}}{|\psi_0|^2} \propto |\psi_{00}|^2 \left[ A + B \cos \left( 2 \frac{\omega_0}{c} \Delta l \right) \right] \quad (6.15)$$

Nous allons maintenant calculer l'expression du signal d'erreur.

### Le signal d'erreur

Le signal d'erreur après démodulation à la fréquence  $\Omega$  a pour expression :

$$\begin{pmatrix} \text{B1p\_ACp} \\ \text{B1p\_ACq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re \\ -Im \end{pmatrix} [\psi_{\text{B1p}}^*(\omega_0) \psi_{\text{B1p}}(\omega_0 + \Omega) - \psi_{\text{B1p}}(\omega_0) \psi_{\text{B1p}}^*(\omega_0 - \Omega)] \quad (6.16)$$

Nous reprenons les expressions des champs définis par les relations 6.12, 6.13 et nous obtenons finalement :

$$\begin{pmatrix} \text{B1p\_ACp} \\ \text{B1p\_ACq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_{01}|^2 (E + G \cos(2 \frac{\omega_0}{c} \Delta l)) + |\psi_{00}|^2 F \sin(2 \frac{\omega_0}{c} \Delta l) \\ |\psi_{01}|^2 H \cos(2 \frac{\omega_0}{c} \Delta l) \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} E &= 2 |\psi_0|^2 J_0 J_1 (\alpha_N^2 + \alpha_W^2) \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right) \\ F &= |\psi_0|^2 J_0 J_1 \left(1 - \frac{1}{2} (\alpha_N^2 + \alpha_W^2)\right) \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right) \\ G &= 4 |\psi_0|^2 J_0 J_1 \alpha_N \alpha_W \cos\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right) \\ H &= |\psi_0|^2 J_0 J_1 \frac{1}{2} (\alpha_N^2 - \alpha_W^2) \sin\left(\frac{\Omega}{c} \Delta l\right) \end{aligned}$$

Nous avons obtenu l'expression du signal en DC en sortie du mode cleaner (B1\_DC) et celle des signaux d'erreurs avant (B1p\_ACp) et après (B1\_ACp) le mode cleaner.

### Evolution de B1\_DC en fonction de B1p\_ACp

Puisque les deux signaux sont obtenus en sortie du mode cleaner, la composante dépendante de  $|\psi_{01}|$  est négligeable. Alors, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{B1\_DC}(u) &= E + F \cos(u) \\ \text{B1p\_ACp}(u) &= B \sin(u) \end{aligned}$$

avec  $u = \frac{2\omega_0}{c} \Delta l$ .

Il apparait donc clairement à partir de ces deux expressions que le signal d'erreur B1p\_ACp est assimilable à la dérivée du signal B1\_DC. Ainsi, quand le signal B1\_DC atteint sa valeur extrême le signal B1p\_ACp est nul. L'offset d'Anderson n'apparaît donc pas dans ce cas.

### Evolution de B1\_DC en fonction de B1p\_ACp

À partir des relations obtenues précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{B1\_DC}(u) &= E + F \cos(u) \\ \text{B1p\_ACp}(u) &= A + B \sin(u) + C \cos(u) \end{aligned}$$

avec  $u = \frac{2\omega_0}{c} \Delta l$ .

Nous constatons dans ce cas que le signal B1p\_ACp n'est plus simplement la dérivée du signal B1\_DC. Le terme supplémentaire dépend de la même condition de frange que celle du signal B1\_DC. Donc le signal d'erreur n'est plus nul à l'endroit où le signal B1\_ACp est extrême. Il apparaît un offset dû à la technique d'Anderson.

Par conséquent, l'utilisation de la technique d'Anderson entraîne la création d'un offset dans les signaux Pound Drever. Il amplifie l'effet du désalignement par l'intermédiaire du mode TEM<sub>01</sub>. Les signaux d'erreurs en sortie du mode cleaner ne sont pas sensibles à l'offset d'Anderson. Ceci justifie donc la différence de stabilité des locks obtenus en utilisant les signaux d'erreurs B1p\_ACp et B1\_ACp.

Comme l'offset d'Anderson est relié à des problèmes d'alignement des miroirs, nous avons par la suite effectué des simulations pour donner une spécification angulaire à respecter aux contrôles locaux.

### 6.1.3 Simulation

Les simulations consistent à déplacer un degré de liberté angulaire des miroirs et d'évaluer à quel moment l'offset d'Anderson est au delà de la plage linéaire du signal d'erreur. Nous simulons jusqu'à l'ordre  $m + n = 3$  et le désalignement maximal autorisé des miroirs est de  $5 \mu\text{rad}$ .

#### Spécification angulaire

L'effet en  $\theta_x$  et  $\theta_y$  est symétrique. Nous simulons l'effet uniquement en désalignant les miroirs en  $\theta_x$ . La simulation va jusqu'au troisième ordre des bandes latérales. Nous avons voulu donner des spécifications sur le contrôle angulaire des miroirs afin d'évaluer la durée de la stabilité du lock de l'interféromètre recombinaison.

Dans la zone linéaire du signal d'erreur, nous avons :

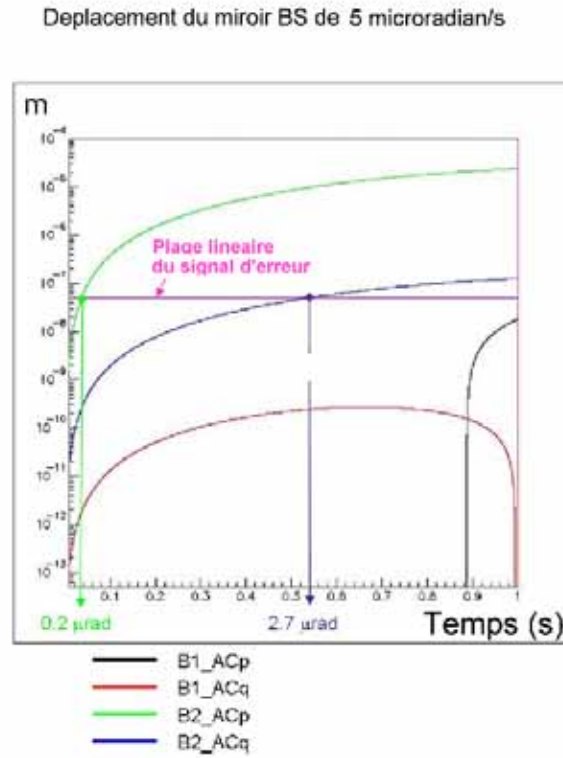
$$\text{Signal\_Erreur} = g_{\text{optique}} \delta L + \text{Offset}$$

Alors, au point de lock ( $\text{Signal\_Erreur} = 0$ ), nous pouvons ramener cet offset à l'équivalent d'une longueur  $|\delta L| = |\frac{\text{Offset}}{g_{\text{optique}}}|$ .

Le but de cette étude est d'évaluer pour quelles valeurs de désalignement des miroirs cet offset dépasse la zone linéaire du signal d'erreur. Pour cela, nous avons suivi la procédure suivante :

- mesure de la matrice optique linéaire avec une simulation statique et prise en compte des modes d'ordres supérieurs jusqu'à  $m + n \leq 3$  ;
- mesure de la taille de la région linéaire du signal d'erreur pour chaque longueur ;
- calcul de la longueur équivalente de l'offset d'Anderson en désalignant les miroirs et comparaison de cette valeur à la taille de la zone linéaire du signal d'erreur.

Prenons l'exemple d'une simulation sur le miroir BS. Nous désalignons le miroir BS avec une vitesse de  $5 \mu\text{rad/s}$  et nous évaluons la valeur du désalignement pour lequel le signal d'erreur n'est plus dans la zone linéaire (voir figure 6.3). Cette valeur nous donne la spécification que doivent respecter les contrôles locaux du miroir BS. Nous devons pondérer le résultat en fonction de la stratégie de lock.



**FIG. 6.3:** Comparaison entre la plage linéaire des différents signaux d'erreurs avec la longueur équivalente de l'offset d'Anderson en désalignant le miroir BS de 5  $\mu\text{rad/s}$ .

	Avec la technique de Anderson	Sans la technique de Anderson
Miroir BS	2.7 $\mu\text{rad}$	4 $\mu\text{rad}$
Miroir NI	0.9 $\mu\text{rad}$	0.8 $\mu\text{rad}$
Miroir NE	0.4 $\mu\text{rad}$	0.8 $\mu\text{rad}$
Miroir WI	0.95 $\mu\text{rad}$	0.9 $\mu\text{rad}$
Miroir WE	0.4 $\mu\text{rad}$	1 $\mu\text{rad}$

**TAB. 6.1:** Spécification angulaire sur les contrôles locaux pour assurer une bonne stabilité du lock dans le mode recombiné de Virgo.

En effet, cet offset peut affecter de manière plus ou moins importantes les signaux d'erreurs employés dans l'algorithme d'acquisition du lock.

En procédant de la même manière avec tous les miroirs, nous avons pu établir les spécifications à remplir par les contrôles locaux. Nous comparons ces spécifications au cas où nous n'utiliserions pas la technique d'Anderson. Comme le montre le tableau 6.1, les spécifications sur les contrôles locaux sont plus strictes lorsque nous utilisons la technique d'Anderson mais elles ne sont pas si éloignées (facteur 2) de celles estimées lorsque nous n'utilisons pas cette technique. Le désalignement des miroirs de fond NE et WE est le plus critique car ce sont des miroirs courbes.

Nous avons suivi la même démarche pour l'étude de l'impact de l'offset d'Anderson sur la stabilité du lock de Virgo.

## 6.2 L'offset d'Anderson dans Virgo

L'utilisation du miroir de recyclage couple tous les signaux entre eux. Les mécanismes mis en jeu sont donc plus complexes que dans le cas du mode recombinaison. Seule la simulation permet d'apporter des réponses rapides au problème de l'offset d'Anderson.

### 6.2.1 Simulation

L'objectif des simulations est uniquement d'évaluer l'impact de l'offset d'Anderson sur la stabilité du lock de Virgo. Cette démarche a été adoptée car pour atteindre la sensibilité nominale de Virgo, nous devons utiliser l'Alignement. Or, pour faire les mesures nécessaires aux algorithmes d'Alignement, nous devons avoir un lock stable.

Nous avons effectué quatre types de simulation.

- Simulation dans lesquelles nous faisons des mouvements angulaires des miroirs avec un algorithme de lock qui utilise la linéarisation des signaux d'erreurs.
- Simulation dans lesquelles nous faisons des mouvements angulaires des miroirs avec un algorithme de lock qui n'utilise pas la technique de linéarisation des signaux d'erreurs.
- Simulation en modulant le champ en entrée de Virgo à la fréquence d'Anderson.
- Simulation en modulant le champ en entrée de Virgo à une fréquence différente de 3 kHz de la fréquence d'Anderson.

Dans toutes les simulations, nous ne considérons pas les pertes dans les miroirs et les caractéristiques optiques des deux cavités Fabry-Perot identiques.

À partir du tableau 6.2, nous pouvons faire les remarques suivantes. Avec un algorithme de lock linéaire sans utilisation du signal d'erreur produit par le mode cleaner, les contraintes sur le désalignement du miroir NE sont 3 fois plus importantes quand nous utilisons la technique d'Anderson. Avec l'emploi du signal d'erreur issu du mode cleaner, ce facteur se réduit à 2.

	NE $\mu\text{rad}$	NI $\mu\text{rad}$	BS $\mu\text{rad}$	PR $\mu\text{rad}$
Sans linéarisation				
Sans TA	1.7	$> 5$	4	$> 5$
Avec TA	0.5	2.3	1.9	1.2
Avec mode cleaner sur la frange noire et sans linéarisation				
Sans TA	1.7	$> 5$	4	$> 5$
Avec TA	0.7	2.3	2	1.6
Avec linéarisation				
Sans TA	1	1.7	1	1
Avec TA	0.5	1.2	0.7	0.7
Avec mode cleaner sur la frange noire et linéarisation				
Sans TA	1	1.7	1	1
Avec TA	0.7	1.3	0.9	0.8

**TAB. 6.2:** Tableau qui évalue les valeurs de delock pour le désalignement des miroirs NE, NI, BS et PR. Ces valeurs sont obtenues pour deux conditions : Sans technique d'Anderson (TA) et Avec TA. Les tests ont eu lieu en utilisant différents algorithmes de locking : Sans linéarisation ; Avec la technique de linéarisation des signaux d'erreurs ; Avec ou sans l'utilisation signal d'erreur en sortie du mode cleaner.

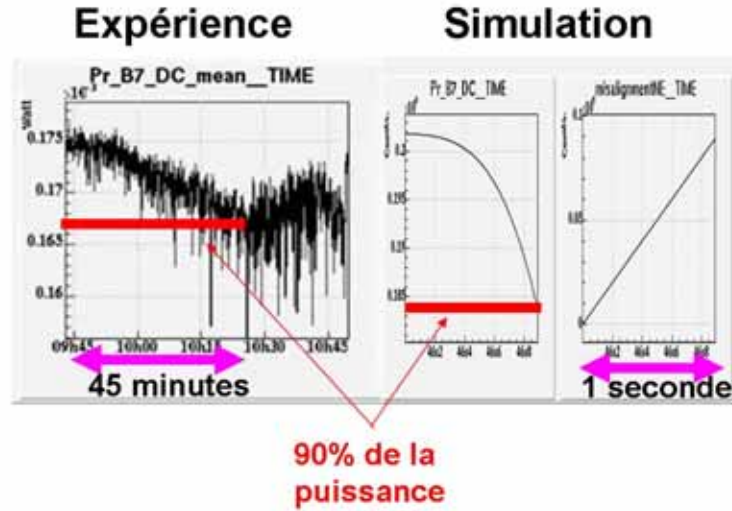
Les conditions pour avoir un lock stable sont plus contraignantes avec l'utilisation de la technique de la linéarisation des signaux d'erreurs. Sans utilisation du signal d'erreur produit par le mode cleaner les contraintes sur le désalignement du miroir NE sont 2 fois plus importante avec la technique d'Anderson. En utilisant le signal d'erreur issu du mode cleaner, les contraintes sont comparables.

Aujourd'hui, nous utilisons la technique d'Anderson, la technique de la linéarisation des signaux d'erreurs et le signal d'erreur produit par le mode cleaner pour le locking de Virgo. Ainsi, nous pouvons travailler dans une configuration stable du lock jusqu'à un désalignement de  $0.7 \mu\text{rad}$  des miroirs de fond NE ou WE.

### Dérive des contrôles locaux et durée de stabilité du lock

À partir des spécifications que doivent respecter les miroirs, nous avons voulu estimer la durée réelle de la stabilité du lock. Pour estimer ce temps, nous avons évaluée la dérive angulaire des miroirs de fond des bras dans le mode recombinaison (voir figure 6.4). Pour cela, nous avons désaligné en simulation le miroir NE de  $1 \mu\text{rad/s}$  de façon à obtenir la même évolution de la puissance que celle observée sur les données. À partir de cette comparaison nous avons pu estimer la dérive du miroir NE à  $1.3 \mu\text{rad/h}$ .

Selon le tableau 6.2, nous perdons le lock lorsque le miroir NE est désaligné de  $0.7 \mu\text{rad}$ . Ainsi, pour faire les mesures nécessaires au fonctionnement de l'Alignement, nous avons près d'une demi-heure de disponible.



**FIG. 6.4:** Evaluation de la dérive angulaire du miroir NE en comparant les résultats obtenus en simulation et sur l'instrument .

Expérimentalement aujourd'hui, nous perdons le lock au bout de 10 minutes en moyenne. Nous restons lockés dans certains cas plus de 1h. À partir de l'étude que nous avons faite, il semble donc que l'offset d'Anderson perturbe la stabilité du lock de Virgo. Un travail a été fait sur les contrôles locaux de tel sorte à augmenter la durée du lock. Aujourd'hui nous avons des locks de durée de plus d'une heure suffisant pour mesurer les paramètres nécessaires au fonctionnement de l'Alignement.

# Conclusion

Le sujet de cette thèse est l'acquisition du lock et la caractérisation optique du détecteur VIRGO. Nous avons mis en place un algorithme pour contrôler les quatre longueurs caractéristiques de l'instrument à quelques nanomètres près. Les différentes parties nous ont montré comment, aujourd'hui, nous procédons pour emmener l'interféromètre à son point de fonctionnement. Nous sommes capable d'acquérir le lock de manière contrôlée et robuste en quelques minutes.

La chaîne de contrôle qui nous permet de locker l'interféromètre utilise les signaux délivrés par le système d'acquisition des données associés aux photodiodes. Ces signaux sont recueillis et traités par le Contrôle Global puis envoyés aux suspensions qui par l'intermédiaire de bobines faisant faces à des aimants collés sur les miroirs permettent le contrôle des différentes longueurs. Tout ceci se fait en moins de  $100 \mu s$ , limite imposée par le système d'acquisition des données de Virgo. De part l'architecture du Contrôle Global, les algorithmes d'acquisition du lock ont pu être isolés, développés puis testés en simulation avant leur application directe sur l'instrument.

Différents algorithmes ont été développés pour contrôler différentes configurations optiques. Le commissioning de l'interféromètre a consisté à intégrer par étape les différents sous-systèmes de VIRGO. Nous avons successivement travaillé sur les cavités Fabry-Perot, le mode recombinaison de l'interféromètre et enfin sur l'interféromètre complet.

La partie consacrée au lock des cavités Fabry-Perot a permis d'introduire les grands principes du Locking. La technique Pound Drever produit un signal résultant du battement entre la porteuse et les bandes latérales et nous permet d'avoir un signal d'erreur sensible à la variation de la longueur par rapport à la résonance de la cavité. Pour faciliter l'acquisition du lock, nous linéarisons ce signal d'erreur, technique qui nous permet en général d'élargir la zone linéaire d'un ordre de grandeur. Les caractéristiques de ce signal dépendent des propriétés optiques de la cavité. La relation entre le signal d'erreur et la longueur à contrôler est résumée dans la matrice optique qui est estimée à partir des signaux délivrés par les photodiodes de l'interféromètre.

Nous avons obtenus le lock de la cavité Fabry-Perot Nord en Octobre 2003 et celle de la cavité Ouest en Décembre 2003.

L'étape suivante du commissioning a été de locker le mode recombinaison de l'interféromètre. Celui-ci consiste à aligner tous les miroirs excepté le miroir de recyclage. Nous avons alors trois longueurs à contrôler. L'absence du miroir de recyclage permet de locker indépendamment les différentes cavités optiques en utilisant les techniques employées pour le lock des cavités Fabry-Perot. Le fait d'avoir un signal de frange noire nous a permis de faire une première étude des asymétries de l'interféromètre ainsi que des différents bruits qui contaminent la sensibilité de l'interféromètre. Cette courbe de sensibilité nous a montré les progrès déjà réalisés et ceux à effectuer pour atteindre la sensibilité nominale de Virgo.

Par la suite, nous nous sommes concentrés sur le lock de VIRGO. Pour ce dernier, nous



avons développé deux algorithmes. Le premier est un algorithme de lock itératif inspiré de celui utilisé par la collaboration LIGO. A cause des caractéristiques optiques et mécaniques de VIRGO les différentes tentatives de lock avec cet algorithme se sont soldées par des échecs. Ces différents problèmes concernaient, la fonction de transfert mécanique du miroir PR qui perturbe le contrôle de la longueur de recyclage, les franges d'interférences sur le signal d'erreur issue du faisceau réfléchi par l'interféromètre et enfin le bruit de fréquence du laser qui ne permettait pas de locker l'instrument même en simulation.

La solution provisoire pour réduire ces perturbations a été de diminuer la puissance entrant dans l'interféromètre. Après cette modification, nous avons continué de tester l'algorithme de lock itératif mais sans véritable succès. Nous avons alors développé un algorithme dénommé à finesse variable de nature déterministe inspiré de l'algorithme de lock du mode recombinaison. L'idée principale de cet algorithme est de contrôler l'interféromètre hors de la frange noire du Michelson de telle sorte à diagonaliser au mieux la matrice optique. Un des responsables de l'échec du lock de VIRGO par l'algorithme itératif a été le bruit de fréquence du laser. Dans ce nouvel algorithme, nous avons pu le réduire par l'intermédiaire de l'asservissement de la longueur CARM sur le laser. Ceci a également permis de minimiser la composante CARM dans tous les signaux d'erreurs. Nous emmenons ensuite l'interféromètre au point de fonctionnement de manière contrôlée en s'approchant petit à petit de la frange noire. La longueur DARM, canal de l'onde gravitationnelle est contrôlée à  $10^{-12}$  m RMS. Aujourd'hui, cet algorithme aisément automatisable et robuste permet de locker l'interféromètre en quelques minutes.

La meilleure sensibilité obtenue à ce jour est de  $6 \times 10^{-22}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 700 Hz encore loin de la sensibilité nominale qui est de  $5 \times 10^{-23}/\sqrt{\text{Hz}}$  à 250 Hz.

Cependant, nous avons obtenu ce résultat en réduisant la puissance entrant dans l'interféromètre. Pour résoudre durablement les problèmes énumérés plus haut, un miroir de recyclage monolithique avec une plus grande réflectivité ainsi qu'un nouveau banc d'injection sur lequel un isolateur de Faraday est placé seront installés à l'automne 2005.

La prochaine étape du commissioning sera donc de réduire la contribution des bruits à la courbe de sensibilité du détecteur. Cette chasse au bruit n'a pas pu réellement commencer à cause d'une bistabilité que nous appelons "jump" apparue depuis le mois de Décembre 2005. Il semble que ce phénomène soit lié à l'alignement des photodiodes et du banc d'injection qui perturbe les signaux employés pour l'acquisition du lock de l'interféromètre. Il rend le lock instable et peu pratique pour les mesures nécessaires aux algorithmes permettant le contrôle angulaire des miroirs.

Un effet qui diminue également la stabilité du lock nécessaire à la mesure des paramètres pour le contrôle angulaire des miroirs est l'offset d'Anderson. Nous avons découvert son existence sur le lock du mode recombinaison. En effet, en utilisant dans l'algorithme d'acquisition du lock le signal d'erreur avant le mode cleaner de sortie nous ne restions lockés qu'une dizaine de minutes. Dès que nous avons utilisé le signal d'erreur en sortie du mode cleaner nous avons pu rester lockés plusieurs heures. Cet offset issu de la technique utilisée pour le contrôle angulaire des miroirs couple de manière plus forte les signaux d'erreurs aux défauts d'alignements des miroirs. Le mécanisme qui est à l'origine de cet offset est la contribution des modes  $\text{TEM}_{01}$  au signal Pound Drever utilisé pour le locking. Cet offset disparaîtra dès que le contrôle angulaire des miroirs sera opérationnel.

En ce qui concerne la chasse au bruit différentes pistes sont possibles. Nous pouvons modifier les matrices de répartitions qui distillent les corrections pour contrôler les longueurs sur d'autres miroirs. Par exemple, dans toute la thèse nous utilisons une matrice de répartition diagonale pour contrôler les longueurs PRCL et MICH. Or, un mouvement

de BS engendre une modification de la longueur de recyclage. Prendre en compte ce terme de couplage dans la matrice de répartition permettra de réduire la contribution de cette boucle d'asservissement à la courbe de sensibilité de VIRGO. Nous pouvons aussi imaginer de modifier la partie reconstruction des longueurs en y incluant plus de signaux d'erreurs. Peut-être sera-t-il nécessaire auparavant de locker l'interféromètre dans la phase linéaire.

Le moment où VIRGO arrivera à sa sensibilité nominale semble quoi qu'il en soit se rapprocher. Les progrès ont été constants durant les trois années de ma thèse et sont prometteurs pour la suite.

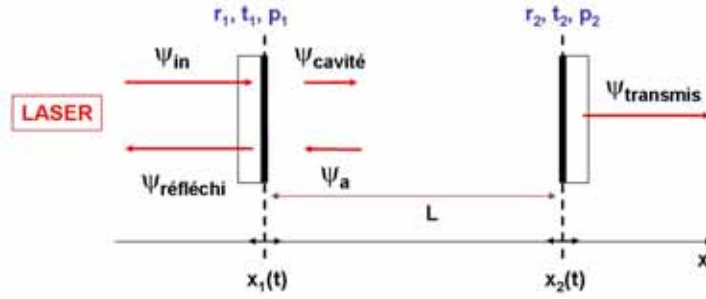


# Annexe A

## Faisceau et cavité optique

### A.1 Equation générale d'une cavité Fabry-Perot

La cavité Fabry-Perot considérée est représentée sur la figure A.1. Les variables  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  décrivent la position des miroirs en fonction du temps. Nous allons dans cette partie, nous intéresser au régime stationnaire de la cavité, c'est à dire à l'expression des champs à l'équilibre.



**FIG. A.1:** Schéma d'une cavité Fabry-Perot avec des miroirs plans.

Nous indiquons par  $r_i$ ,  $t_i$  respectivement la réflectivité, la transmissivité en amplitude et les pertes  $p_i$  en puissance du miroir :

$$r_i^2 + t_i^2 + p_i = 1$$

En reprenant la convention d'écriture de la figure A.1, les différents champs de la cavité s'écrivent :

$$\begin{aligned} \psi_{\text{cavité}} &= t_1 \psi_{\text{in}} + i r_1 \psi_a \\ \psi_a &= i r_2 e^{-2i\varphi} \psi_{\text{cavité}} \\ \psi_{\text{transmis}} &= t_2 e^{-i\varphi} \psi_{\text{cavité}} \\ \psi_{\text{réfléchi}} &= i r_1 \psi_{\text{in}} + t_1 \psi_a \end{aligned}$$

avec  $\varphi = k L = \frac{2\pi}{\lambda} L$  le déphasage introduit par la propagation de la lumière sur la longueur  $L$  de la cavité.

Le champ intra-cavité s'écrit à l'équilibre :

$$\psi_{\text{cavité}} = \frac{t_1}{1 + r_1 r_2 e^{-2i\varphi}} \psi_{\text{in}} \quad (\text{A.1})$$

Pour le champ réfléchi, nous avons :

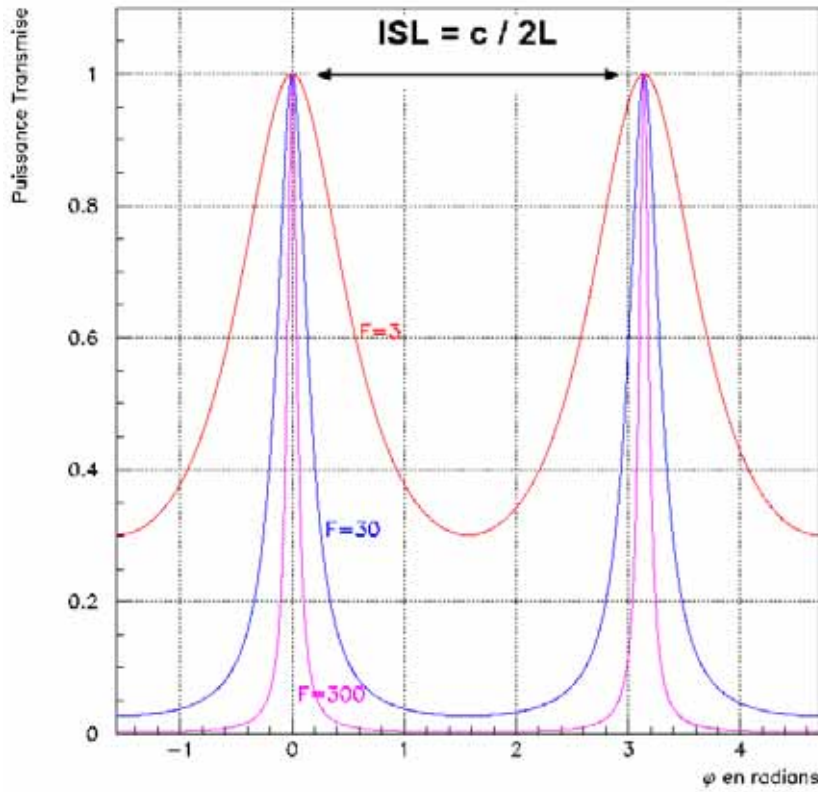
$$\psi_{\text{réfléchi}} = i \frac{r_1 + (1 - p_1) r_2 e^{-2i\varphi}}{1 + r_1 r_2 e^{-2i\varphi}} \psi_{\text{in}} \quad (\text{A.2})$$

Et enfin, le champ transmis est :

$$\psi_{\text{transmis}} = \frac{t_1 t_2 e^{-i\varphi}}{1 + r_1 r_2 e^{-2i\varphi}} \psi_{\text{in}}$$

La puissance transmise par la cavité Fabry-Perot est :

$$P_{\text{transmis}}(\varphi) = \frac{(t_1 t_2)^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + \frac{4 r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \sin^2(\varphi)} P_{\text{in}} \quad (\text{A.3})$$



**FIG. A.2:** Courbe d'Airy pour différentes finesses de cavités Fabry-Perot.

Cette fonction porte le nom de fonction d'Airy et est illustrée pour différentes finesses (voir plus loin) sur la figure A.2. Nous pouvons remarquer que plus la finesse augmente plus la largeur du pic de la résonance est étroite.

Les grandeurs qui définissent complètement une cavité Fabry-Perot sont résumées dans ce qui suit.

- Distance entre chaque résonance en changeant la longueur de la cavité :  $\delta l = \frac{\lambda}{2}$
- Distance entre chaque résonance en variant la fréquence :  $\text{ISL}^1 = \frac{c}{2L}$
- Finesse de la cavité optique :  $\mathcal{F} \simeq \pi \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2}$
- Largeur de la résonance à mi-hauteur ; en mètres :  $\epsilon = \frac{\lambda}{4\mathcal{F}}$  ; en Hertz :  $\epsilon = \frac{c}{2L\mathcal{F}}$ .  
Alors, la finesse peut se réécrire :  $\mathcal{F} = \frac{\text{ISL}}{\epsilon}$
- Transmissivité maximale :  $t_{\text{résonance}} = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2}$
- Réflectivité à la résonance :  $r_{\text{résonance}} = \frac{r_1 - r_2(1 - p_1)}{1 - r_1 r_2}$

Pour augmenter la sensibilité d'un instrument comme Virgo, nous mettons à profit l'effet d'amplification de la puissance et du déphasage produite par la cavité Fabry-Perot à la résonance. Cet effet est directement relié au champ intra cavité. Il est donc important de pouvoir l'estimer.

### Champ intra-cavité

À la résonance, le champ intra-cavité s'écrit :

$$\psi_{\text{cavité}} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \psi_{\text{in}}$$

Nous définissons le gain de la cavité Fabry-Perot par :

$$G = \frac{P_{\text{cavité}}}{P_{\text{in}}} = \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2}$$

Étudions deux cas particuliers :

**Cas 1 :**  $r_1 = r_2 = r$  (cas de la cavité de recyclage de Virgo) :

$$G = \frac{1}{1 - r^2}$$

Par conséquent, si  $r \sim 1$ , nous avons :

$$G \sim \frac{\mathcal{F}}{\pi} \tag{A.4}$$

**Cas 2 :**  $r_1 = r$  et  $r_2 \simeq 1$  (cas des cavités Fabry-Perot de Virgo) :

$$G = \frac{1 - r_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2} = \frac{1 + r}{1 - r}$$

---

<sup>1</sup>Intervalle Spectral Libre.

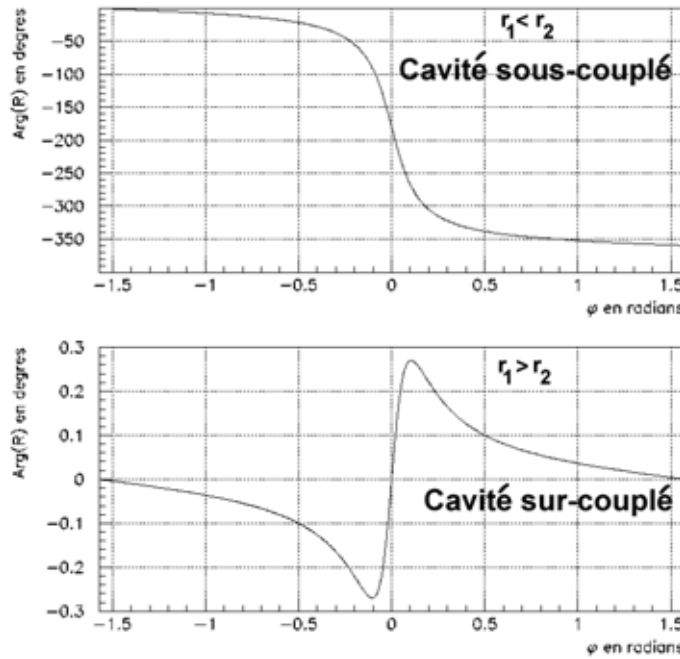
Par conséquent, si  $r \sim 1$ , nous avons :

$$G \sim \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \quad (\text{A.5})$$

### Champ réfléchi par la cavité Fabry-Perot

Selon l'équation A.2, le champ réfléchi par une cavité Fabry-Perot est donné par :

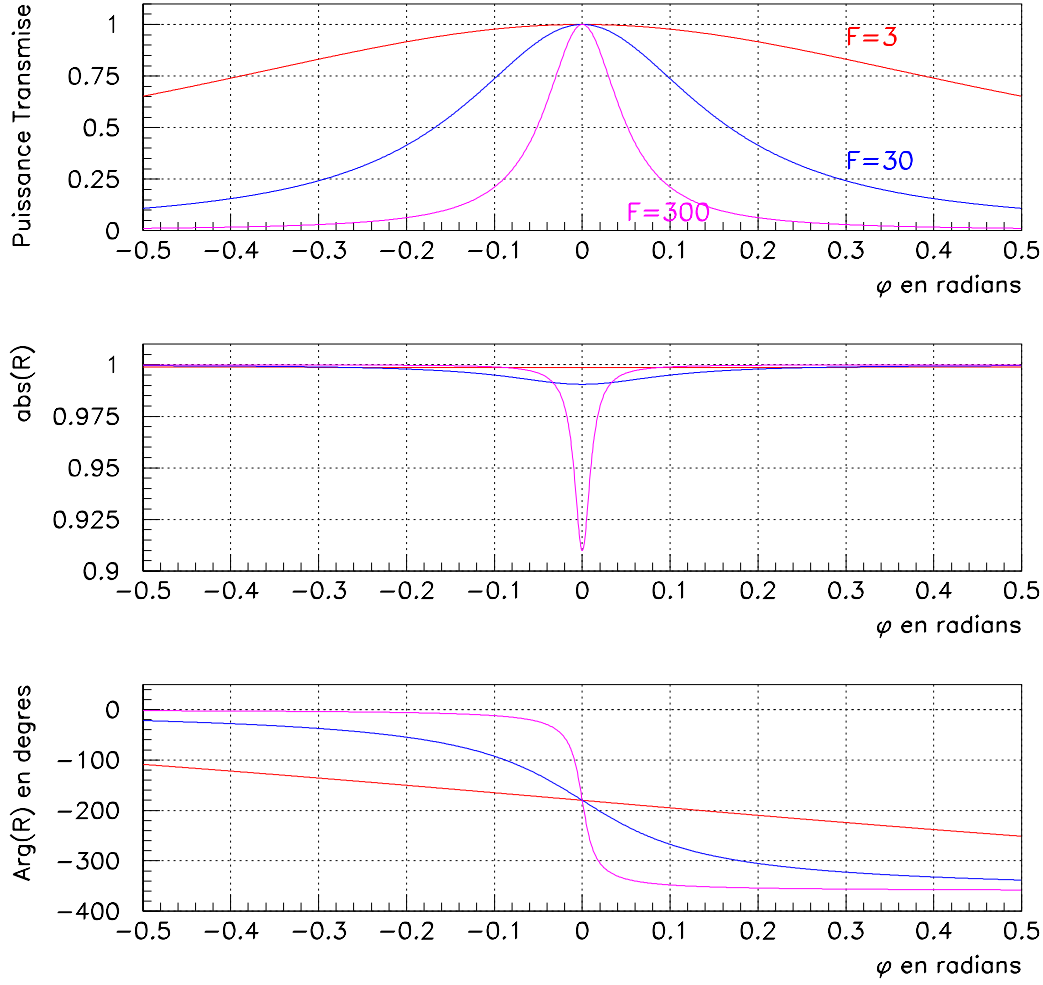
$$\psi_{\text{réfléchi}}(\varphi) = i \frac{r_1 + (1 - p_1) r_2 e^{-2i\varphi}}{1 + r_1 r_2 e^{-2i\varphi}} \psi_{\text{in}} = r_{\text{Fabry-Perot}}(\varphi) \psi_{\text{in}} \quad (\text{A.6})$$



**FIG. A.3:** Évolution de la phase de la réflectivité complexe de la cavité Fabry-Perot pour différentes réflectivités  $r_1$  et  $r_2$ .

Nous avons alors trois cas de figures :

- a)  $r_1 - r_2(1 - p_1) = 0$  : la cavité est optimalement couplée. Le champ réfléchi à la résonance est nul et la transmittivité est maximale et très proche de 1. La variation de phase et de module du champ réfléchi est maximale à la résonance.
- b)  $r_1 - r_2(1 - p_1) < 0$  : la cavité Fabry-Perot est sous-couplée. Le champ réfléchi par la cavité Fabry-Perot à la résonance est déphasé de  $\pi$  par rapport à la phase du champ avant la résonance. Ce cas de figure est illustré par la figure A.3 avec  $r_1 < r_2$ .
- c)  $r_1 - r_2(1 - p_1) > 0$  : la cavité est sur-couplée. Le champ réfléchi par la cavité Fabry-Perot à la résonance ne subit pratiquement pas de déphasage. Ce cas de figure est illustré par la figure A.3 avec  $r_1 > r_2$ .



**FIG. A.4:** Evolution de la puissance en sortie, de l'amplitude et de la phase de la réflectivité complexe de la cavité Fabry-Perot pour différentes finesse.

La figure A.4 illustre l'évolution de la puissance en sortie, de l'amplitude et de la phase de la réflectivité complexe de la cavité Fabry-Perot pour différentes finesse. Deux cas particuliers sont à distinguer dans le cas de Virgo :

a) A la résonance ( $\varphi = 0$ ,  $r_1 = r$  et  $r_2 \approx 1$  et des pertes nulles) :

$$\frac{dr_{\text{Fabry-Perot}}(\varphi)}{d\varphi} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \quad (\text{A.7})$$

b) A l'antirésonance ( $\varphi = \pi$ ,  $r_1 = r$  et  $r_2 \approx 1$  et des pertes nulles) :

$$\frac{dr_{\text{Fabry-Perot}}(\varphi)}{d\varphi} \approx \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \quad (\text{A.8})$$

Ainsi, le comportement des cavités de Virgo diffère selon qu'elle soit ou non à la résonance. L'amplitude de cette variation dépend de la finesse de la cavité.



### A.1.1 Réponse dynamique d'une cavité Fabry-Perot

Nous avons dans la partie précédente étudié la cavité Fabry-Perot dans le régime stationnaire. Nous allons maintenant nous intéresser à son comportement dans le régime dynamique.

Selon la figure A.1, l'équation du champ intracavité  $\psi_{\text{cavité}}(t)$  en fonction du champ entrant dans la cavité Fabry-Perot  $\psi_{\text{in}}(t)$  et des positions des miroirs  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  s'écrit :

$$\psi_{\text{cavité}}(t) = t_1 \psi_{\text{in}}(t) + F(t) \psi_{\text{cavité}}(t - \tau) \quad (\text{A.9})$$

avec :

$$F(t) = -r_1 r_2 e^{i\omega\tau} e^{i\left(\frac{\omega}{c}\right)(-x_1(t-\tau) + 2x_2(t - \frac{\tau}{2}) - x_1(t))} \text{ et } \tau = 2\frac{L}{c} \quad (\text{A.10})$$

où  $L$  est la longueur macroscopique,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  les déplacements microscopiques des miroirs d'entrée et de fond et  $\tau$  le temps nécessaire pour que la lumière fasse un aller retour dans la cavité Fabry-Perot.

Pour simplifier les équations, nous définissons le paramètre  $R = r_1 r_2 e^{i\omega\tau}$ . Au voisinage de la résonance et en supposant  $|x_1| \ll 1$  et  $|x_2| \ll 1$ , l'équation A.10 s'écrit :

$$F(t) \approx -R \left\{ 1 + i \left( \frac{\omega}{c} \right) \left( -x_1(t - \tau) + 2x_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - x_1(t) \right) \right\} \quad (\text{A.11})$$

En utilisant l'approximation A.11, la relation A.9 devient :

$$\begin{aligned} \psi_{\text{cavité}}(t) = & t_1 \psi_{\text{in}}(t) \\ & - R \left\{ 1 + i \left( \frac{\omega}{c} \right) \left( -x_1(t - \tau) + 2x_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - x_1(t) \right) \right\} \psi_{\text{cavité}}(t - \tau) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Considérons que les champs sont la superposition d'une partie constante et d'une partie dépendante du temps :

$$\psi(t) = \psi_0 + \delta\psi(t) \text{ et } |\delta\psi| \ll |\psi_0| \quad (\text{A.13})$$

En reprenant l'équation A.12, à l'ordre 0, nous retrouvons la relation statique usuelle (cf. équation A.1). Au premier ordre, l'équation A.12 devient :

$$\begin{aligned} \delta\psi_{\text{cavité}}(t) = & t_1 \delta\psi_{\text{in}}(t) - R \delta\psi_{\text{cavité}}(t - \tau) \\ & - i \left( \frac{\omega}{c} \right) R \left( -x_1(t - \tau) + 2x_2\left(t - \frac{\tau}{2}\right) - x_1(t) \right) \psi_{\text{cavité}_0} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Appliquons la transformée de Laplace à l'équation A.14 :

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\psi}_{\text{cavité}}(s) = & \frac{t_1}{1 + R e^{-\tau s}} \delta\tilde{\psi}_{\text{in}}(s) + i \left( \frac{\omega}{c} \right) R \tilde{\psi}_{\text{cavité}_0} \frac{1 + e^{-\tau s}}{1 + R e^{-\tau s}} \tilde{x}_1(s) \\ & - i 2 \frac{\omega}{c} R \psi_{\text{cavité}_0} \frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{1 + R e^{-\tau s}} \tilde{x}_2(s) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Dans l'équation précédente la quantité  $\tilde{\chi}(s)$  se réfère à la transformation de Laplace de la variable temporelle  $\chi(t)$  et  $s = i\omega$  est la fréquence complexe.

La relation A.15 montre que le comportement en fréquence de la cavité Fabry-Perot peut être défini par trois fonctions de transfert. La première fonction de transfert relie le champ intracavité à la variation du champ incident. La seconde et la troisième fonction de transfert relient la variation du champ intracavité aux déplacements du miroir d'entrée et de sortie de la cavité Fabry-Perot.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à la partie basse fréquence de l'équation A.15 ( $f < \frac{c}{2L}$ , pour Virgo  $f < 50$  kHz) sensible aux déplacements longitudinaux des miroirs.

Les deux fonctions de transfert contiennent le terme de délai  $e^{-s\tau}$ . Pour avoir des fonctions de transfert linéaire, nous utilisons l'approximation de Padé :

$$e^{-s\tau} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} \quad (\text{A.16})$$

en utilisant l'équation A.16 dans l'équation A.15, nous obtenons :

$$\delta\tilde{\psi}_{\text{cavité}}(s) = F_2(s) \tilde{x}_1(s) + F_3(s) \tilde{x}_2(s) \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$F_2(s) = i 2 \frac{\omega}{c} \tilde{\psi}_{\text{cavité}_0} \frac{R}{1+R} \frac{1}{1 + \frac{1-R}{1+R} \frac{\tau}{2} s} \quad (\text{A.18})$$

$$F_3(s) = -i 2 \frac{\omega}{c} \tilde{\psi}_{\text{cavité}_0} \frac{R}{1+R} \frac{(1 + \frac{\tau}{2}s)(1 - \frac{\tau}{4}s)}{(1 + \frac{\tau}{4}s)(1 + \frac{1-R}{1+R} \frac{\tau}{2} s)} \quad (\text{A.19})$$

Au premier ordre en  $s$ , l'équation A.17 se réécrit :

$$\delta\tilde{\psi}_{\text{cavité}}(s) = -F_2(s) \delta\tilde{L}(s) \quad (\text{A.20})$$

La quantité  $\delta\tilde{L}(s) = \tilde{x}_2(s) - \tilde{x}_1(s)$  exprime la différence de position des miroirs d'entrée et de fond de la cavité Fabry-Perot.

A la résonance de la cavité, nous avons  $R = -r_1 r_2$ , la relation A.20 se réécrit donc :

$$F_2(s) = i 2 \frac{\omega}{c} \tilde{\psi}_{\text{cavité}_0} \left( -\frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \right) \frac{1}{1 + \frac{1+r_1 r_2}{1-r_1 r_2} \frac{\tau}{2} s} \quad (\text{A.21})$$

L'expression précédente peut s'écrire :

$$F_2(s) = i A \frac{1}{1 + \frac{1+r_1 r_2}{1-r_1 r_2} \frac{\tau}{2} s} \quad (\text{A.22})$$

avec la constante  $A = 2 \frac{\omega}{c} \tilde{\psi}_{in_0} \frac{t_1}{1-r_1 r_2} \left( -\frac{r_1 r_2}{1-r_1 r_2} \right)$  et  $\tilde{\psi}_{\text{cavité}_0} = \tilde{\psi}_{in_0} \frac{t_1}{1-r_1 r_2}$ .

Nous avons de plus  $s = i 2 \pi f$  alors l'équation A.22 devient :

$$F_2(f) = i A \frac{1}{1 + i \frac{\frac{1+r_1 r_2}{1-r_1 r_2} \frac{\tau}{2}}{\frac{c}{2L} \frac{1}{\pi}}} f} \quad (\text{A.23})$$

or nous avons  $\mathcal{F} = \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1-r_1 r_2}$ , alors la relation A.23 s'écrit :

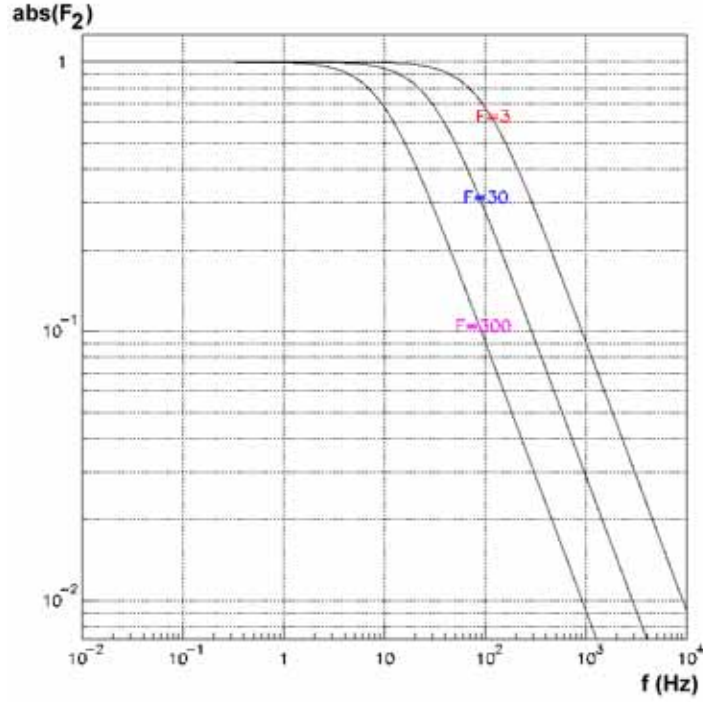
$$F_2(f) = i A \frac{1}{1 + i \frac{\frac{1+r_1 r_2}{1-r_1 r_2} \frac{\tau}{2}}{\frac{c}{2\mathcal{F}L} \frac{1}{\pi}}} f} \quad (\text{A.24})$$

Puisque dans le cas de Virgo  $r_1 r_2 \sim 1$  alors  $\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1 + r_1 r_2} \sim \frac{1}{2}$  donc l'équation A.24 s'exprime :

$$F_2(f) = i A \frac{1}{1 + i \frac{f}{\frac{c}{4\mathcal{F}L}}} \quad (\text{A.25})$$

Donc, apparaît une fréquence de coupure de la cavité Fabry-Perot qui dépend de la finesse  $\mathcal{F}$  :

$$f_{\text{Fabry-Perot}} = \frac{c}{4\mathcal{F}L} \quad (\text{A.26})$$



**FIG. A.5:** Fonctions de transfert d'une cavité Fabry-Perot de longueur  $L = 3000$  m pour différentes finesesses.

La figure A.5 illustre trois fonctions de transfert d'une cavité Fabry-Perot de 3 km pour différentes finesesses.

À partir de la définition de la fréquence de coupure, nous définissons le temps que met la lumière à atteindre l'équilibre dans la cavité Fabry-Perot :

$$\begin{aligned} \tau_{\text{FP}} &= \frac{1}{f_{\text{FP}}} \frac{1}{4\pi} \\ \tau_{\text{FP}} &= \frac{L\mathcal{F}}{\pi c} \end{aligned}$$

Pour Virgo ( $\mathcal{F} \sim 50$  et  $L = 3000$  m),  $\tau_{\text{FP}} \sim 0.16$  ms.

## A.2 Faisceau Gaussien

Dans la partie précédente, nous avons étudié le comportement statique et dynamique de la cavité Fabry-Perot en utilisant le formalisme des ondes planes. Nous allons dans ce qui suit nous intéresser aux effets transverses.

En réalité, un laser idéal émet un champ électromagnétique  $U(\vec{r})$  cohérent et monochromatique qui satisfait à l'équation d'onde suivante :

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (\text{A.27})$$

où  $k = 2\pi/\lambda$  est la norme du vecteur d'onde et  $\lambda$  la longueur d'onde. L'équation A.27 admet une infinité de solutions.

### A.2.1 Modes d'Hermitte-Gauss

Une famille de solution de l'équation A.27 est donnée par la base des modes d'Hermitte-Gauss. Chaque mode est caractérisé par deux entiers  $m$  et  $n$  :

$$TEM_{mn}(\vec{r}) = \frac{A_{mn}}{w(z)} H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - i(kz - \phi_{mn}(z))} \quad (\text{A.28})$$

où :

- $H_j(x)$  sont les polynômes d'Hermitte d'ordre  $j$  en  $x$  :

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_{j+1}(x) = 2xH_j(x) - 2jH_{j-1}(x)$$

- $\phi_{mn}(z)$  est la phase de Guoy définie par :

$$\phi_{mn}(z) = (m+n+1) \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)$$

La phase de Guoy dépend de l'ordre  $(mn)$  du mode.

- $A_{mn}$  est la constante de normalisation :

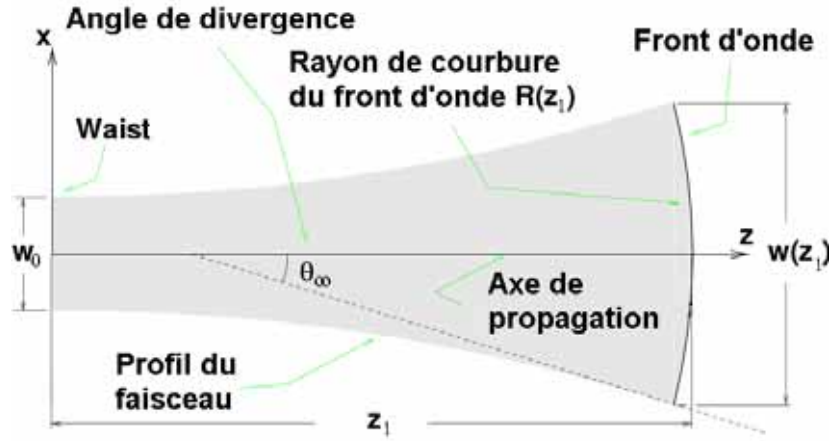
$$A_{mn} = \left(\frac{2}{2^{m+n} n! m! \pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Le faisceau est caractérisé en tout point le long de son axe de propagation par deux fonctions :  $R(z)$  et  $w(z)$  comme le montre la figure A.6. Le premier terme décrit le rayon de courbure du front d'onde qui intersecte l'axe de propagation du faisceau. Le second terme, pour le mode fondamental  $TEM_{00}$ , donne le rayon dans le plan transverse pour lequel l'amplitude du champ décroît d'un facteur  $1/e$  par rapport à l'amplitude le long de l'axe de propagation.

Pour le mode fondamental  $TEM_{00}$ , la distribution transverse du faisceau a uniquement une dépendance Gaussienne et son rayon  $w(z)$  se contracte en un minimum  $w_0$  qui est le waist<sup>2</sup> du faisceau.

---

<sup>2</sup>Traduction anglaise du terme col, utilisé de manière générique dans la littérature scientifique.



**FIG. A.6:** Profil d'un faisceau gaussien se propageant selon l'axe  $z$ .

Les deux paramètres  $R(z)$  et  $w(z)$  sont déterminés par la taille du waist et par la distance  $z$  à partir de la position du waist :

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]$$

Le profil du faisceau déterminé par la fonction  $w(z)$  est une hyperbole d'asymptotes formant un angle  $\theta_\infty$  avec l'axe de propagation :

$$\theta_\infty = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

qui définit la divergence du faisceau.

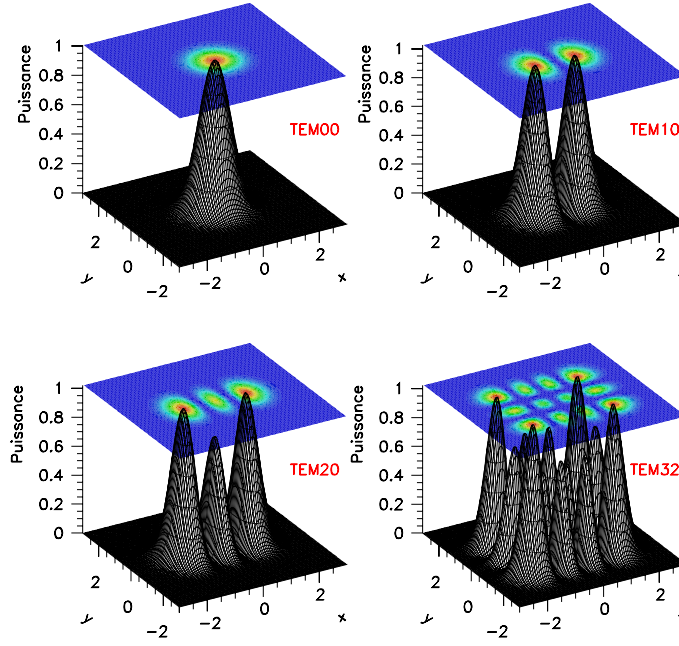
Un autre paramètre qui mesure la divergence du faisceau est la longueur de Rayleigh définie comme suit :

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Le faisceau est d'autant plus divergent que la longueur de Rayleigh ( $z_R$ ) est petite.

Le polynôme d'Hermite d'ordre  $n$  possède  $n$  zéros. L'intensité du mode  $|TEM_{mn}|^2$  présente donc dans le plan transverse une structure formée respectivement de  $(m+1)$  et  $(n+1)$  maxima dans les directions  $x$  et  $y$ .

La figure A.7 illustre l'intensité du faisceau pour différents modes.



**FIG. A.7:** Quelques modes d'Hermite-Gauss en puissance.

En haut à gauche : mode fondamental  $\text{TEM}_{00}$ . En haut à droite : mode  $\text{TEM}_{10}$ .

En bas à gauche : mode  $\text{TEM}_{20}$ . En bas à droite : mode  $\text{TEM}_{32}$ .

### A.2.2 Modes de Laguerre-Gauss

Une autre famille de solution de l'équation A.27 est donnée par la base des modes de Laguerre-Gauss. Chaque mode est caractérisé par trois entiers  $p$ ,  $l$  et  $i$ .

Notant par  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires dans le plan transverse, les fonctions suivantes sont solutions de l'équation A.27 :

$$E_{pli} = \frac{w_0}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right)^l L_p^l \left( \frac{2r^2}{w(z)^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2} - i\phi_{pl}(r,z)} \times \begin{cases} \cos(l\theta), & i = 1 \\ \sin(l\theta), & i = 2 \end{cases}$$

La phase du champ  $\phi_{pl}(r, z)$  est alors donnée par :

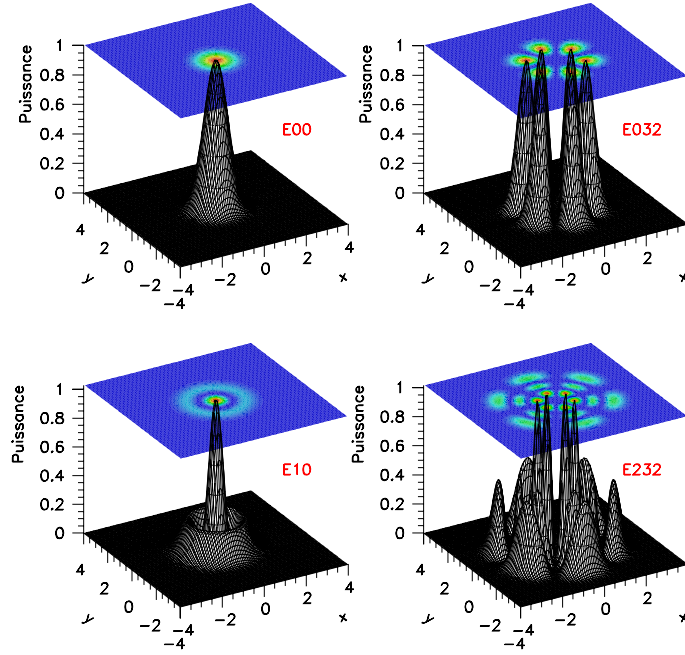
$$\phi_{pl}(r, z) = kz - (2p + l + 1) \arctan \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0} \right) + \frac{k r^2}{2 R(z)}$$

$p$  ( $p = 0, 1, \dots$ ) est l'indice radial et  $l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) l'indice angulaire. Les fonctions  $L_p^l$  sont les polynômes de Laguerre. Les grandeurs  $w_0$ ,  $z_R$ ,  $w(z)$  et  $R(z)$  caractérisant les solutions sont strictement identiques à celle des modes d'Hermite-Gauss.

Les polynômes de Laguerre ont pour expression :

$$L_p^l(x) = \sum_{j=0}^p C_{p+l}^{p-j} \frac{(-x)^j}{j!} \quad (\text{A.29})$$

Pour  $l = 0$ , les solutions  $E_{p0}$  ont la symétrie cylindrique et l'intensité  $|E_{p0}|^2$  a une structure transverse formée de  $p$  anneaux entourant une tache centrale.



**FIG. A.8:** Quelques modes de Laguerre-Gauss.

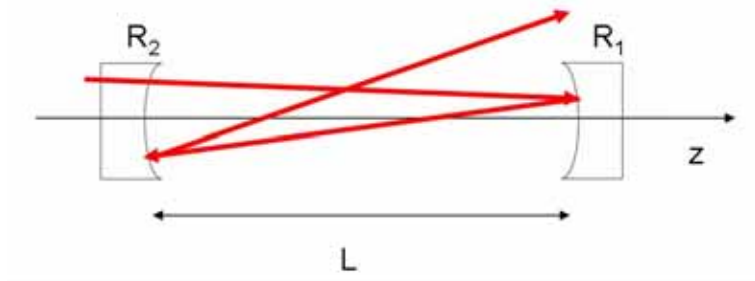
En haut à gauche : mode fondamental  $L_0^0$ . En haut à droite : mode  $L_0^3$ .

En bas à gauche : mode  $L_1^0$ . En bas à droite : mode  $L_2^3$ .

Lorsque  $l \neq 0$ , la section transverse est formée de  $p+1$  anneaux (sans tache centrale) sur chacun desquels sont distribués  $2l$  maxima en intensité, comme l'illustre la figure A.8.

L'ensemble des modes de Laguerre-Gauss forment, comme celui des modes d'Hermitte-Gauss, une base complète et permet de développer n'importe quel champ électromagnétique en propagation libre. Cependant, le choix de la base est souvent dicté par les symétries du problème.

### A.2.3 Propagation d'un faisceau gaussien dans une cavité Fabry-Perot



**FIG. A.9:** Représentation d'une cavité instable de laquelle la lumière s'échappe.

Soit une cavité optique formée de deux miroirs sphériques de rayon de courbure  $R_1$  et  $R_2$  séparés par une distance  $L$ .

La figure A.9 illustre la trajectoire d'un rayon lumineux qui, après quelques réflexions sur les miroirs, finit par s'échapper de la cavité. Dans ce cas, la cavité est dite instable. Lorsqu'au contraire, le rayonnement reste confiné au voisinage de l'axe z, la cavité est dite stable.

L'analyse de la stabilité est présentée ici de manière simple dans le formalisme de l'optique matricielle. Rappelons qu'un rayon lumineux est caractérisé par le vecteur  $\vec{r}$  dont les composantes sont respectivement l'écart  $r(z)$  par rapport à l'axe optique de la cavité et la pente  $\frac{dr(z)}{dz}$ .

La loi de transformation d'un rayon lumineux faisant des allers retours dans la cavité s'exprime à l'aide des matrices ABCD relatives à la propagation libre et à la réflexion sur les miroirs.

La cavité optique est assimilable à un système optique périodique dont la maille élémentaire  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  [85], agit sur la propagation du faisceau. La matrice ABCD de la cavité Fabry-Perot (voir figure A.9) est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2L}{R_1} & 2L - \frac{2L^2}{R_1} \\ -\frac{2}{R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{4L}{R_1 R_2} & -\frac{2L}{R_2} + \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{2L}{R_2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

Le problème de la stabilité d'un système périodique se ramène à l'étude des valeurs propres  $\lambda$  de la matrice M. Celles-ci sont définies par :

$$\lambda_{a,b} = \frac{A + D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A + D}{2}\right)^2 - 1} \quad (\text{A.31})$$

vérifiant :

$$\lambda_a \lambda_b = 1 \quad (\text{A.32})$$

Les vecteurs propres correspondant à  $\lambda_{a,b}$  sont notés  $\vec{r}_{a,b}$  et forment une base sur laquelle nous pouvons développer le vecteur incident, noté  $\vec{r}_0$  :

$$\vec{r}_0 = c_a \vec{r}_a + c_b \vec{r}_b \quad (\text{A.33})$$

Le rayon sortant après passage dans une maille de la séquence est défini par le vecteur :

$$\vec{r}_1 = M \vec{r}_0 = c_a \lambda_a \vec{r}_a + c_b \lambda_b \vec{r}_b \quad (\text{A.34})$$

Par itération, nous obtenons l'expression du vecteur à la sortie d'une séquence de N éléments :

$$\vec{r}_N = M^N \vec{r}_0 = c_a \lambda_a^N \vec{r}_a + c_b \lambda_b^N \vec{r}_b \quad (\text{A.35})$$

Lorsque la norme d'une des valeurs propres  $\lambda_a$  ou  $\lambda_b$  est supérieur à l'unité, le vecteur  $\vec{r}_N$  diverge. Le rayon s'éloigne de l'axe du système qui est alors instable. La stabilité est alors réalisée pour  $|\lambda_a| \leq 1$  et  $|\lambda_b| \leq 1$ , soit :

$$|A + D| \leq 2 \quad (\text{A.36})$$

Le critère de stabilité A.36 peut s'appliquer directement en utilisant la matrice de transfert (équation A.30) pour un aller retour dans la cavité Fabry-Perot. Nous obtenons :

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{L}{R_2}\right) \leq 1 \quad (\text{A.37})$$



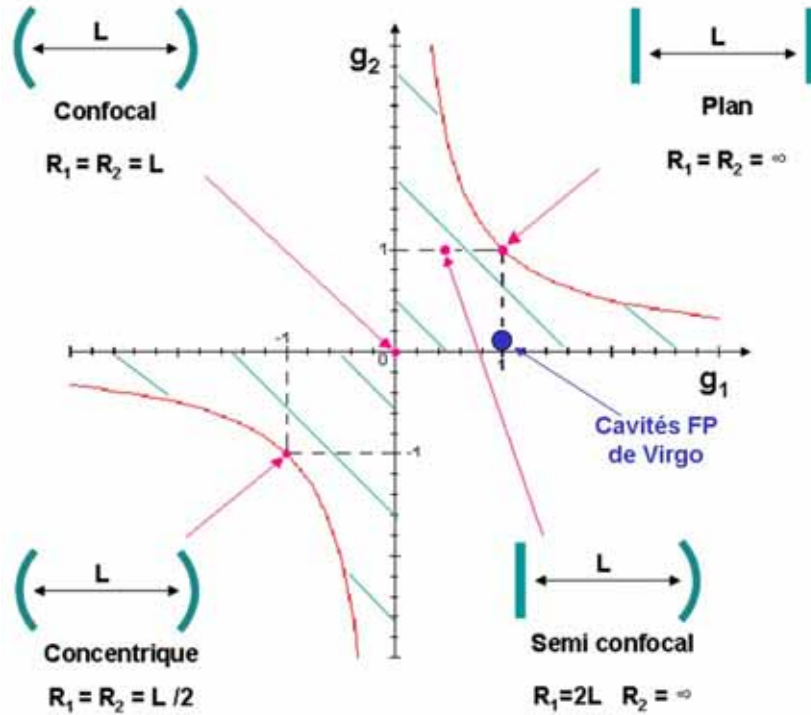
En introduisant les paramètres géométriques du résonateur  $g_1$  et  $g_2$  définis par :

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}, \quad (\text{A.38})$$

l'équation A.37 devient :

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \quad (\text{A.39})$$

Un résonateur vérifiant l'équation A.39 est donc capable de confiner le rayonnement. Le critère de stabilité est illustré par la figure A.10 où chaque géométrie de résonateur est alors représentée par un point dans le plan  $(g_1, g_2)$ .



**FIG. A.10:** Représentation graphique de la stabilité d'une cavité Fabry-Perot (équation A.39). La zone de stabilité correspond à l'aire hachurée.

Dans ce qui suit, différents cas limites sont décrits.

- Le résonateur plan-plan, caractérisé par  $g_1 = g_2 = 1$  est à la limite de la stabilité.
- Pour  $g_1 = g_2 = 0$  et donc  $R_1 = R_2 = L$ , les deux miroirs ont même foyer et la cavité est qualifiée de confocale. Celle-ci se situe à la limite du domaine de stabilité.
- Lorsque  $g_1 = g_2 = -1$  ou encore  $R_1 = R_2 = \frac{L}{2}$ , la cavité est concentrique. Elle est à la limite du domaine de stabilité. Ces deux derniers exemples sont des cas particuliers des cavités symétriques ( $R_1 = R_2$ ).
- Les résonateurs hémisphériques sont constitués d'un miroir sphérique  $R_1$  et d'un miroir plan  $R_2 = \infty$ . Dans ce cas,  $g_2 = 1$  et la stabilité est vérifiée si  $R_1 \geq L$ .

- Un cas particulier de résonateur hémisphérique est le résonateur semi-confocal défini par  $R_1 = \infty$  et  $R_2 = 2L$ . Il est situé à l'intérieur de la zone de stabilité ( $g_1 = 1, g_2 = \frac{1}{2}$ ) ou ( $g_1 = \frac{1}{2}, g_2 = 1$ ).

Une cavité formée de deux miroirs convexes ( $R_{1,2} < 0$ ) a pour paramètres  $g_{1,2} > 1$ . Elle est instable. Nous pouvons cependant réaliser des cavités stables avec un miroir convexe et un miroir concave satisfaisant à l'équation A.39.

## A.3 Réponse d'une cavité aux défauts statiques du faisceau

Nous nous plaçons au waist où les expressions sont les plus simples. La dimension du champ transverse est minimale et le rayon de courbure est infini.

Pour une cavité Fabry-Perot, nous avons six paramètres qui décrivent l'alignement et le "mismatch"<sup>3</sup> du faisceau d'entrée : deux de rotations, deux de translations transverses (alignement) et enfin deux concernant la position axiale et la taille du waist.

Pour décrire la réponse de la cavité à une translation ou à une rotation du faisceau d'entrée, nous utilisons la base de Hermite-Gauss. Pour décrire la réponse de la cavité à une différence de position ou de taille du waist (mismatch) du faisceau d'entrée par rapport au waist de la cavité, nous utilisons la base de Laguerre-Gauss.

### A.3.1 Déplacement transverse et rotation

Plaçons nous dans la base de Hermite-Gauss pour l'étude de ce problème :

$$TEM_{00}(x) = U_0(x) = N e^{\left[-\left(\frac{x}{w_0}\right)^2\right]} \quad (\text{A.40})$$

$$TEM_{10}(x) = U_1(x) = N \frac{2x}{w_0} e^{\left[-\left(\frac{x}{w_0}\right)^2\right]} \quad (\text{A.41})$$

avec  $N$  une constante de normalisation.

Le faisceau entrant dans la cavité est gaussien et s'exprime :

$$\psi(x) = A U_0(x) \quad (\text{A.42})$$

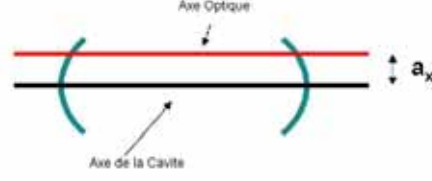
### Désalignement de l'axe optique et de l'axe de la cavité

Le champ exprimé dans la base propre de la cavité s'écrit :

$$\psi(x) = A U_0(x - a_x) = A N e^{\left[-\left(\frac{x - a_x}{w_0}\right)^2\right]} \quad (\text{A.43})$$

---

<sup>3</sup>Traduction anglaise du terme "désaccord".



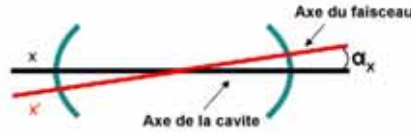
**FIG. A.11:** Déplacement de l'axe optique par rapport à l'axe de la cavité.

si  $\frac{a_x}{w_0} \ll 1$  et en négligeant le terme du deuxième ordre :

$$\begin{aligned}\psi(x) &\simeq AN \left( 1 + 2 \frac{a_x x}{w_0^2} \right) e^{-\left(\frac{x}{w_0}\right)^2} \\ \psi(x) &\simeq AN \left[ U_0(x) + \frac{a_x}{w_0} U_1(x) \right]\end{aligned}\tag{A.44}$$

Par conséquent, un petit déplacement transverse du faisceau d'entrée (voir figure A.11) crée un couplage avec le premier mode d'Hermitte-Gauss  $\text{TEM}_{10}$  (voir figure A.7).

### Tilt de l'axe optique par rapport à l'axe de la cavité



**FIG. A.12:** “Tilt” d'un angle  $\alpha_x$  de l'axe du faisceau par rapport à l'axe de la cavité.

Projeté sur l'axe (voir figure A.12) la phase du faisceau s'écrit :

$$\phi(x) = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) x \sin(\alpha_x) \simeq \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) x \alpha_x\tag{A.45}$$

or :

$$\psi(x) \simeq AU_0(x) e^{i\phi(x)} = AU_0(x) e^{i \frac{2\pi}{\lambda} x \alpha_x}\tag{A.46}$$

si  $\frac{2\pi}{\lambda} x \alpha_x \ll 1$ , c'est-à-dire que l'angle du tilt<sup>4</sup> est plus petit que l'angle de divergence en champ lointain, alors :

$$\psi(x) \simeq AU_0(x) + AU_0(x) \frac{2x}{w_0} i \pi \frac{\alpha_x w_0}{\lambda}\tag{A.47}$$

<sup>4</sup>Traduction anglaise du mot inclinaison.

or :

$$U_1(x) = \frac{2x}{w_0} U_0(x)$$

alors :

$$\psi(x) \simeq A \left[ U_0(x) + i\pi \frac{\alpha_x w_0}{\lambda} U_1(x) \right] \quad (\text{A.48})$$

Comme pour le déplacement transversal du faisceau d'entrée par rapport à l'axe de la cavité, nous avons création de mode d'Hermitte-Gauss du premier ordre TEM<sub>10</sub> (voir figure A.7). Cependant, dans ce cas l'effet, se trouve déphasé de 90 degrés.

### A.3.2 Effet du mismatch

Nous utilisons la base de Laguerre-Gauss  $L_p^l$  pour l'étude de ce problème. Dans ce qui suit, nous ne considérons pas de dépendance angulaire soit  $l = 0$ .

Au "waist"<sup>5</sup>, les deux modes radiaux d'ordres les plus bas sont :

$$\begin{aligned} L_0^0(x) = V_0(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \\ L_1^0(x) = V_1(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0} \left( 1 - \frac{2r^2}{w_0^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

avec  $r$  la coordonnée radiale.

**La taille du waist du faisceau ( $w_0$ ) est différent de la taille du waist de la cavité ( $w_0'$ )**



**FIG. A.13:** La taille du waist du faisceau ( $w_0$ ) est différent de la taille du waist de la cavité ( $w_0'$ ).

Nous avons :

$$\psi(r) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_0'} e^{-\frac{r^2}{w_0'^2}} \quad (\text{A.50})$$

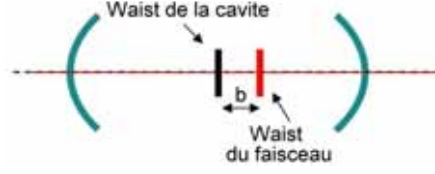
or  $w_0 = w_0' (1 + \epsilon)$  (voir figure A.13) soit :

$$\psi(r) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + \epsilon}{w_0} e^{-\frac{r^2}{w_0^2} (1 + \epsilon)^2}$$

alors :

$$\psi(r) \simeq A [V_0(r) + \epsilon V_1(r)] \quad (\text{A.51})$$

Un mismatch de la taille du waist de  $\epsilon$  excite le premier ordre du mode radial de Laguerre-Gauss  $L_1^0$  (voir figure A.8).



**FIG. A.14:** La position du waist du faisceau est différent de la position du waist de la cavité d'une distance  $b$ .

### La position du waist du faisceau et de la cavité ne concordent pas

Les deux modes d'ordre les plus bas sont :

$$V_0(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} e^{[-r^2(\frac{1}{w^2} + i\frac{\pi}{\lambda R(z)})]} \quad (\text{A.52})$$

$$V_1(r, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} \left(1 - 2\frac{r^2}{w^2}\right) e^{[-r^2(\frac{1}{w^2} + i\frac{\pi}{\lambda R(z)})]} \quad (\text{A.53})$$

avec :

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)\right] \quad (\text{A.54})$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)\right] \quad (\text{A.55})$$

À une courte distance  $b$  du waist, nous avons :

$$\kappa \equiv \frac{\lambda b}{\pi w_0^2} \ll 1 \quad (\text{A.56})$$

soit :

$$R(b) = \kappa^{-2} \quad (\text{A.57})$$

$$w^2(b) \simeq w_0^2 \quad (\text{A.58})$$

L'expression du faisceau entrant en considérant le déplacement du waist s'écrit :

$$\psi(r, z) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w} e^{-\frac{r^2}{w^2}(1-\kappa)} \quad (\text{A.59})$$

en faisant une développement limité de l'exponentielle :

$$\psi(r, z) = A \left[ V_0 + \frac{i}{2} \kappa V_1 \right] \quad (\text{A.60})$$

Ainsi, un déplacement du waist du faisceau par rapport au waist de la cavité (voir figure A.14) produit un couplage avec le premier ordre radial des modes de Laguerre-Gauss  $L_1^0$  (voir figure A.8) dans ce cas en quadrature avec le mode fondamental.

Les différents modes spatiaux ont en général des fréquences non dégénérées. La différence de fréquence est caractérisée par une fréquence  $\nu_0$ . La différence de fréquence entre

---

<sup>5</sup>Traduction anglaise du mot col.

### A.3. RÉPONSE D'UNE CAVITÉ AUX DÉFAUTS STATIQUES DU FAISCEAU

le mode fondamental  $\text{TEM}_{00}$  et un mode d'ordre supérieur d'Hermitte-Gauss  $\text{TEM}_{mn}$  ou de Laguerre-Gauss  $L_p^l$  est donné par :

$$\delta\nu = k \nu_0 \quad (\text{A.61})$$

Pour une cavité Fabry-Perot de longueur  $L$  :

$$\nu_0 = \frac{c}{2L} \frac{1}{\pi} \arccos \left[ \left( 1 - \frac{L}{R_1} \right) \left( 1 - \frac{L}{R_2} \right) \right] \quad (\text{A.62})$$

- Pour les modes d'Hermitte-Gauss  $\text{TEM}_{mn}$  :  $k = m + n$ .
- Pour les modes de Laguerre-Gauss  $L_p^l$  :  $k = 2p + l$ .

Un désalignement entraîne un couplage avec les modes d'Hermitte-Gauss du premier ordre soit :  $\delta\nu = \nu_0$ .

Puisque nous considérons uniquement le cas  $l = 0$ , un mismatch du waist entraîne un couplage avec les modes de Laguerre-Gauss du premier ordre ( $p = 1$ ) soit :  $\delta\nu = 2\nu_0$ .

La table suivante résume les différents effets évoqués plus haut :

Degrés de liberté	Paramètre	Coefficient de couplage	Mode	Phase (deg)	Fréquence
Position transverse	$a$	$\frac{a}{w_0}$	$U_1$	0	$\nu_0$
Tilt angulaire (rayon)	$\alpha$	$\alpha \frac{\pi w_0}{\lambda}$	$U_1$	90	$\nu_0$
Taille du waist	$w'_0$	$\frac{w'_0}{w_0} - 1$	$V_1$	0	$2\nu_0$
Position axiale du waist	$b$	$\frac{\lambda b}{2\pi w_0^2}$	$V_1$	90	$2\nu_0$

**TAB. A.1:**  $w_0$  est la taille du waist de la cavité ;  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière.

Les expressions des modes  $U_1$  et  $V_1$  au waist de la cavité sont données par les équations A.41 et A.49 et sont respectivement représentées sur les figures A.7 et A.8.  $\nu_0$  est donné par l'équation A.62 avec  $c$  la vitesse de la lumière et  $L$  la longueur de la cavité Fabry-Perot. Les positions sont mesurées à partir du waist de la cavité.



# Bibliographie

- [1] E. Lifchitz et L. Landau, “Théorie des champs”, Edition MIR, 1970.
- [2] Michelson et Morley, *American Journal of Science*, 22, 120, 1881.
- [3] G. Sagnac, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences* (Paris), 157, 708 (Octobre 1913).
- [4] G. Sagnac, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences* (Paris), 157, 1410 (Decembre 1913).
- [5] P. Langevin, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences* (Paris), 173, 831 (Novembre 1921).
- [6] V.B. Braginsky & V.I. Panov, *Sov. Phys. JETP* 34, 463-466 (1972).
- [7] Y. Su, B.R. Heckel, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, M. Harris, G.H. Smith and H.E. Swanson, *Phys. Rev. D* 50 3614 (1994).
- [8] G.L. Smith, C.D. Hoyle, J.H. Gundlach, E.G. Adelberger, B.R. Heckel, and H.E. Swanson, *Phys. Rev. D* 61 022001 (2000).
- [9] A. Einstein, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, Sitzber, 844 (1915).
- [10] A. Einstein, “Naeherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation”, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, Sitzber, 688 (1916).
- [11] R.A. Hulse and J.H. Taylor, *Astrophys. Jour.* 195 L51-L53 (1975).
- [12] T. Damour, “Strong-field tests of relativistic gravity and binary pulsars”, *Phys. Rev. D* vol. 45 (1992).
- [13] Discours de réception du prix Nobel, 1993  
R.A. Hulse, *Rev. Mod. Phys.* 66 699 (1994).  
J.H. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* 66 711 (1994).
- [14] A. Wolszczan, *Nature* 350 688 (1991).
- [15] V.Kalogera et al., “The cosmic coalescence rates for double neutron stars binaries”, *Astrophys. Jour.* 601 L179-L182 (2004).
- [16] M.Burgay et al., “The Highly Relativistic Binary Pulsar PSR J0737-3039A : Discovery and Implications”, *astro-ph/0405179*.
- [17] Kip S. THORNE, “Lecture Notes on General Relativity”, Caltech, 1995; *preprint gr-qc/9506086*.
- [18] C. Cutler, K. S. Thorne, “An overview of gravitational sources”, *gr-qc/0204090*.
- [19] The Virgo Collaboration, Virgo Final Design Report (1997), non publié.
- [20] S. Bonazzola and E. Gourgoulhon, “Physics of sources of gravitationnal waves”, *International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves*, Ed. M. Barone et al., p. 62-105 (2000).



- 
- [21] G. Sainton, Thèse de l'université de Lyon I (2004).
  - [22] N. Arnaud et al., "Detection of a close supernova gravitational wave burst in a network of interferometers, neutrino and optical detectors", *Astropart. Phys.* 21 201-221 (2004).
  - [23] R. B. Tully, "Nearby Galaxies Catalog", Cambridge University Press (1988) and web site <http://cdsweb.u-strasbg.fr/cgi-bin/Cat?VII/145>.
  - [24] S. Bonazzola, & J.-A. Marck, *Astron. Astrophys.* 267, 623 (1993).
  - [25] T. Zwerger & E. Müller, *Astron. Astrophys.* 320 209 (1997).
  - [26] R. Mönchneyer, G. Schaeffer, E. Müller & R.E. Kates, *Astron. Astrophys.* 246 417 (1991).
  - [27] I. A. Bonnel, J. E. Pringle, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* 273, 212 (1995).
  - [28] S. Yamada & K. Sato, *Astrophys. Jour.* 450, 245 (1995).
  - [29] A. Burrows, *Nucl. Phys. A* 606, 151 (1996).
  - [30] S. N. Nazin & K.A. Postnov, *Astron. Astrophys.* 317, L79 (1997).
  - [31] P. Saulson, "Interferometric gravitational wave detectors", *World Scientific* (1994).
  - [32] N. Andersson, *Astrophys. Jour.* 502 708 (1999).
  - [33] B. Owen et al., *Phys. Rev. D* 58 084020 (1998).
  - [34] S. Bonazzola, & J.-A. Marck, *Ann. Rev. Part. Sci.* 45 635 (1994).
  - [35] L. Bildsen, *Astrophys. Jour.* 501 L89 (1998).
  - [36] L. Schnupp, Workshop on gravitational wave detectors, Munich (1988)
  - [37] J-Y. Vinet, B. J. Meers, C.N. Man, A. Brillet, *Phys. Rev. D* 38 433-447 (1988).
  - [38] J. Y. Vinet et al., *Phys Rev D*, 56, 6085(1997).
  - [39] P. Hello, "Couplings in Interferometric Gravitational-Wave Detectors", *Thèse d'Habilitation à diriger des Recherches, Université Paris-Sud LAL* 96-93 (1996).
  - [40] S. Braccini et al., "Design of the Superattenuators for VIRGO construction", *Note Virgo VIR-TRE-PIS-4600-134* (1997).
  - [41] G. Losurdo et al., *Rev. Sci. Inst.*, 72, 3653 (2001).
  - [42] G.Losurdo, "Ultra-Low Frequency Inverted Pendulum for the VIRGO Test Mass Suspension", Thèse de la Scuola Normale Superiore di Pisa, *non publiée* (1998).
  - [43] G. Losurdo, "Active controls in the interferometric detectors of gravitational waves : inertial damping of the Virgo superattenuator", *International Summer School on Experimental Physics of Gravitational Waves*, Ed. M. Barone et al. p. 379-389 (2000).
  - [44] H.B. Callen and T.A. Welton, *Phys. Rev.* 83 34-40 (1951).
  - [45] A. Freise, "Automatic Mirror Alignment for VIRGO : First experimental demonstration of the Anderson technique on a large-scale interferometer", gr-qc/0411116.
  - [46] M. Punturo, "The VIRGO sensitivity curve", *Note Virgo VIR-NOT-PER-1390-51 issue 10* (20/10/2004).
  - [47] B.J. Meers, *Phys. Rev. D* 38 (1988) 2317-2326.
  - [48] K.A. Strain and B.J. Meers, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 1391-1394.
  - [49] M. Barsuglia, "Stabilisation en fréquence du laser et contrôle de cavités optiques à miroirs suspendus pour le détecteur interférométrique d'ondes gravitationnelles Virgo", LAL 99-25 *Thèse de l'Université Paris-Sud* (1999).
-

- [50] T. Pradier, "Etude d'algorithmes pour la détection de signaux impulsifs d'ondes gravitationnelles ; Contrôle de la cavité mode cleaner de Virgo", *Thèse de l'Université Paris-Sud LAL 01-15*(2001).
  - [51] C. Drezen, "Utilisation de caméras CCD pour le contrôle du détecteur d'ondes gravitationnelles VIRGO : Elaboration d'une interface VME et analyse d'images", *Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble I* (1997).
  - [52] G. Ballardini, S. Braccini, D. Passuello, "THE GUARDIAN : a safety software to avoid payload oscillations", *Note Virgo VIR-TRE-PIS-4900-108* (2001).
  - [53] L. Derome, "Le système de détection de l'expérience Virgo dédiée à la recherche d'ondes gravitationnelles", *Thèse de l'Université de Savoie* (1999).
  - [54] Virgo Coll., *AstroPart.Phys.* 21 465 (2004).
  - [55] W.D. Peterson, VMEbus Handbook, 4th Edition VITA (1997).
  - [56] RIO2 8062 : PowerPC based RISC I/O Boards, DOC 8062/UM, CES (1998).
  - [57] F. Bellachia, Virgo Note VIR-TRE-LAP-5200-101 (1996).
  - [58] <http://www.lynxos.com>.
  - [59] D. Boget, F. Bellachia, B. Mours, D. Verkindt, Virgo Note VIR-SPE-LAP-5200-105 (1998).
  - [60] D. Boget, F. Bellachia & B. Mours, Virgo Note VIR-SPE-LAP-5200-103 (1997).
  - [61] M. Weymann, CES compagne, private communication.
  - [62] F. Cavalier, "The global control of the Virgo experiment", *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research*, 2005.
  - [63] <http://www.cvshome.com>.
  - [64] Les logiciels développés au LAL sont accessibles aux adresses suivantes :
    - CMT <http://www.lal.in2p3.fr/SI/CMT/CMT.html>
    - Db <http://www.lal.in2p3.fr/SI/Db/Db.html>
    - Superviseur <http://www.casina.virgo.infn.it/sDoc/virgoApp/Su/readme.html>
  - [65] F. Cavalier, "Le Contrôle Global de Virgo", *Thèse d'Habilitation à diriger des Recherches*, Université Paris-Sud LAL 01-69 (2001), disponible sur le WEB à l'adresse :  
[www.lal.in2p3.fr/presentation/bibliotheque/publications/2001/web/habilitation.html](http://www.lal.in2p3.fr/presentation/bibliotheque/publications/2001/web/habilitation.html).
  - [66] B. Caron et al., *Astropart.Phys.*, 10/4, 369 (1999).
  - [67] R. Gouaty, private communication.
  - [68] E. Gamma et al, Design Patterns, *Addison-Wesley Publishing Company* (1994).
  - [69] P.Hello, PhD Thesis, Université Paris XI (Orsay) (1990)
  - [70] J.Y.Vinet, VIRGO note PJT 94 012.
  - [71] R. Flaminio, H. Heitmann, VIRGO note PJT 93 021.
  - [72] J.Y.Vinet, F.Cavalier, P.Hello, VIRGO note PJT 95 032.
  - [73] F. Bondu, notes Virgo, VIR-NOT-OCA-1390-227 ; VIR-NOT-OCA-1390-234 ; VIR-NOT-OCA-1390-247.
  - [74] D.Z. Anderson *Appl. Opt.* 23, 2944 (1984).
  - [75] E. Morrison, B.J. Meers, D.J. Robertson & H. Ward *Appl. Opt.*, 33, 8041 (1994).
-

- [76] R.W.P. Drever *et al.*, *Appl. Phys.* B31 97 (1983).
- [77] O. Véziant, “Calibration de l’expérience VIRGO : de l’étalonnage du détecteur à la recherche de signaux de coalescences binaires avec l’interféromètre central”, Thèse de doctorat, Université de Savoie, 2003.
- [78] Martin W. Regehr, “Signal Extraction and Control for an Interferometric Gravitational Wave Detector”, 1995, California Institute of Technology Pasadena, California.
- [79] Fritschel P. *et al.*, “Readout and control of a power-recycled interferometric gravitational wave antenna”, 2000, LIGO-P000008-A D.
- [80] Evans M., “Lock Acquisition in Resonant Optical Interferometers”, California Institute of Technology, 2002, LIGO-P020003-00-R.
- [81] Arai K., “Robust extraction of control signals for power-recycled interferometric gravitational-wave detectors”, 2001.
- [82] A. Freise, G. Heinzl, H. Lück, R. Schilling, B. Willke and K. Danzmann : “Frequency domain interferometer simulation with higher-order spatial modes”, *Class. Quantum Grav.* 21 (2003).
- [83] F. Bondu, “Etude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d’ondes gravitationnelles VIRGO”, Thèse de doctorat, Université Paris XI (Orsay), 1996.
- [84] L. Matone, “Finesse and mirror speed measurement for a suspended Fabry-Perot cavity using the ringing effect”, *Phys.Lett.* A271 314-318 (2000).
- [85] H. Kogelnik et T. Li, “Laser beams and resonators”, *Applied Optics*, 5 :1550-1567, 1966.

## Résumé

Le détecteur Virgo est constitué d'un interféromètre de Michelson avec des cavités Fabry-Perot de 3 km de long dans les bras et utilise la technique de recyclage de puissance. Il a pour but la détection directe des ondes gravitationnelles émises par des sources astrophysiques.

Pour atteindre sa sensibilité, Virgo doit être emmené et maintenu à son point de fonctionnement par des asservissements tant longitudinaux qu'angulaires. Pour cela, nous avons mis en place un algorithme de contrôle longitudinal ("lock") qui partant d'un interféromètre libre l'emmène à son point de fonctionnement. Pour arriver à ce résultat, nous utilisons la technique Pound-Drever qui nous permet d'avoir un signal sensible à la variation de la position d'une cavité optique par rapport à la résonance.

Nous avons développé deux algorithmes. Le premier s'inspire de celui utilisé par la collaboration LIGO. Nous arrivons au point de fonctionnement en contrôlant successivement les quatre longueurs caractéristiques de Virgo. L'application de cet algorithme sur l'instrument s'est soldé par un échec dont les causes sont liées aux différences entre Virgo et LIGO. Le deuxième algorithme nous permet de contrôler simultanément ces quatre longueurs en étant sur la mi frange de l'interféromètre de Michelson. Nous emmenons ensuite l'interféromètre en quelques minutes à son point de fonctionnement de manière déterministe.

Une autre partie de la thèse consiste en la mesure in situ des paramètres optiques nécessaires à la compréhension de l'instrument. Ceci nous a permis à la fois de faire accorder la simulation avec les données et de préparer l'algorithme d'acquisition du lock de Virgo.

Enfin, nous nous intéressons à l'impact de la technique d'Anderson utilisée pour le contrôle angulaire des miroirs sur le contrôle longitudinal des cavités optiques. Nous en montrons le mécanisme et évaluons son impact sur le lock de Virgo.

### Mots clés :

Virgo  
Ondes Gravitationnelles  
Interféromètre  
Lock  
Contrôle Global  
Pound-Drever  
Technique d'Anderson

## Summary

The Virgo detector aims at direct detection of the gravitational waves emitted by astrophysical objects. Essentially, it is a Michelson interferometer with arms constituted by 3 km long Fabry-Perot cavities which use the recycling technique.

To reach the required sensitivity, the instrument must be maintained at its working-point using both angular and longitudinal controls. This thesis covers my work on the algorithm implemented in the Global Control to control the four characteristic lengths of the interferometer within a few nanometres, as part of the Locking process.

To achieve this result, we use the Pound-Drever technique, which provides for an optical cavity a signal sensitive to its length compared to the resonance position. Two algorithms has been tested. The first one is inspired by the algorithm developped by LIGO. We control sequentially the different length of Virgo. But, the difference between Virgo and LIGO has been the reason of the failure of this algorithm. The other algorithm brings simultaneously the four lengths on the half fringe of the Michelson interferometer. Our deterministic algorithm brings the instrument to its working point in a few minutes.

Another part of this work deals with in situ measurements of optical parameters critical to an interpretation of the behaviour of the instrument. These allowed us to tune the Virgo simulation and prepare the lock acquisition algorithm.

Finally, we will interest on the coupling between the angular control and the longitudinal control techniques. We show the mechanism and we evaluate his impact on the locking of Virgo.

### Key Words :

Virgo  
Gravitational Waves  
Interferometer  
Lock  
Global Control  
Pound-Drever  
Anderson technique